Universidade Federal de São Paulo
Instituto de Ciência e Tecnologia

De Grupos a Grupoides: uma perspectiva de simetria em dinâmica não-linear

Discente: Antonio E. de Melo
Orientador: Fernando Antoneli

10 de Setembro de 2019

Conteúdo

Introdução

Vamos começar revisando um conceito básico:

Definição

Um **grupo** é um conjunto G com uma operação binária

$$G \times G \to G,\ (x, y) \mapsto x \cdot y \qquad \text{onde vale:}$$

- *Identidade*: existe $e \in G$ tal que $\forall x \in G$,
$$e \cdot x = x = x \cdot e$$
- *Inverso*: para cada $x \in G$ existe um x' tal que
$$x \cdot x' = e = x' \cdot x$$
- *Associatividade*: para todo $x, y, z \in G$,
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

O que é simetria?

Uma resposta típica:

- Uma **simetria** de um objeto é uma *transformação* do objeto que preserva propriedades essenciais.

Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, uma **simetria** = uma **isometria** = uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que preserva distâncias.

As isometrias do plano são:

- translações,
- rotações,
- reflexões, ou
- reflexões com deslizamento

Introdução

Seja $P \subset \mathbb{R}^2$ um **objeto planar**.

Definição

O **grupo de simetria** de P é o conjunto das isometrias do plano que preservam P:

$$Sym(P) = \{f \in Isom(\mathbb{R}^2) \mid f(P) = P\}.$$

1. Seja C uma circunferência de centro $p \in \mathbb{R}^2$. Então,
$$Sym(C) = \{\text{rotações e reflexões de retas através de } p\}$$
2. Seja T um triângulo equilátero. $Sym(T)$ consiste de
   - Identidade
   - rotações de 120° e 240°
   - reflexões através de alturas de T

Propriedades dos grupos de simetria

- A composição de simetrias é uma simetria.

$$f, g \in Sym(P) \Rightarrow f \circ g \in Sym(P)$$

- Fazer nada é uma simetria.

$$id \in Sym(P)$$

- Simetrias podem ser desfeitas.

$$f \in Sym(P) \Rightarrow f^{-1} \in Sym(P)$$

- A composição de simetrias é associativa.

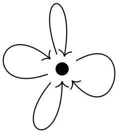
$$f, g, h \in Sym(P) \Rightarrow (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

Grupos como laços

Definição alternativa de grupos

Um conjunto de laços de mesmo vértice e um jeito de 'multiplicar' laços, satisfazendo:

- Deve haver um laço **identidade**.
- Cada laço deve ter um **inverso**.
- A multiplicação de laços deve ser **associativa**.



vértice = **objeto**
laços = **transformações** do objeto

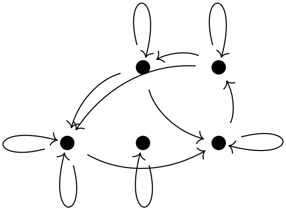
De grupos para grupoides

Um **grupoide** é como um grupo, com a exceção de que nem todos os elementos podem ser multiplicados.

Podemos pensar em um grupoide como um grupo onde a operação binária foi substituída por uma **função parcial**.

Quando a multiplicação é possível, ela satisfaz todos os axiomas de grupo: **identidade**, **inversos** e **associativadade**.

Definição de grupoide



Definição

Um grupoide $\mathbb{G}$ consiste de:

- um conjunto $\mathbb{G}_0$ de objetos, chamado *espaço total*
- um conjunto $\mathbb{G}_1$ de setas chamado *espaço base*
- um jeito de compor certas setas

todos satisfazendo as seguintes propriedades.

Definição de grupoide

Definição (continuação)

- Se $x \xrightarrow{\varphi} y$ e $y \xrightarrow{\psi} z$ são setas, então há uma seta $x \xrightarrow{\psi\circ\varphi} z$
- Para cada objeto x há uma **seta identidade** $x \xrightarrow{1_x} x$
- Para cada seta $x \xrightarrow{\varphi} y$ há uma **seta inversa** $y \xrightarrow{\varphi^{-1}} x$
- Quando possível, a multiplicação de setas é **associativa**

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[rr, bend left, "\psi \circ \varphi"] \arrow[rrr, bend right, "\omega \circ (\psi \circ \varphi) = (\omega \circ \psi) \circ \varphi"'] & y \arrow[r, "\psi"'] \arrow[rr, bend left, "\omega \circ \psi"] & v \arrow[r, "\omega"'] & w
\end{tikzcd}$$

Projeções estruturais

Definição (continuação)

- Aplicações sobrejetoras $\sigma, \tau : \mathbb{G}_0 \to \mathbb{G}_1$ chamadas, respectivamente, de **projeção fonte** e **projeção alvo**

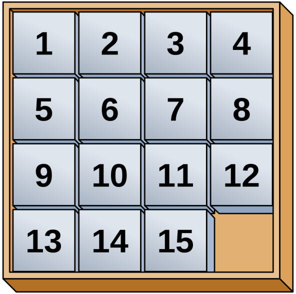
$$\sigma(x \xrightarrow{\varphi} y) = x \qquad \tau(x \xrightarrow{\varphi} y) = y$$

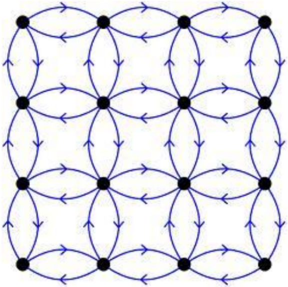
- Uma aplicação μ chamada de *multiplicação* do grupoide

$$\begin{aligned} \mu : \quad \mathbb{G}_0^{(2)} &\longrightarrow \mathbb{G}_0 \\ (\psi_2, \psi_1) &\longmapsto \psi_2\psi_1 \end{aligned}$$

onde $\mathbb{G}_0^{(2)} = \{(\psi_2, \psi_1) \in \mathbb{G}_0 \times \mathbb{G}_0 \mid \sigma(\psi_2) = \tau(\psi_1)\}$

Um exemplo de grupoide pode ser observado no conhecido **Jogo do 15**





A **dinâmica equivariante** examina como as simetrias de uma equação diferencial afetam o comportamento de suas soluções.[1, 3, 9]
Por simplicidade, assuma que o *espaço de fase* de um sistema dinâmico é $X = \mathbb{R}^k$ e considere uma EDO

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x) \quad x \in X, \tag{1}$$

onde $f : X \to X$ é uma função suave (campo vetorial).

Simetrias surgem quando um grupo Γ de transformações lineares age em X. Exigimos que todos os elementos de Γ associem soluções da EDO a outras soluções. Isso é equivalente a f ser Γ-*equivariante*, ou seja,

$$f(\gamma x) = \gamma f(x) \qquad \forall\, \gamma \in \Gamma, x \in X \tag{2}$$

Exemplo

Considere o sistema de equações para 3 neurônios de Fitzhugh-Nagumo acoplados:

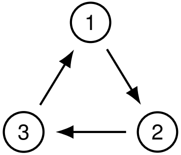
$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_1(a - v_1)(v_1 - 1) - w_1 - c v_2 & \qquad \dot{w}_1 &= b v_1 - \gamma w_1 \\ \dot{v}_2 &= v_2(a - v_2)(v_2 - 1) - w_2 - c v_3 & \qquad \dot{w}_2 &= b v_2 - \gamma w_2 \\ \dot{v}_3 &= v_3(a - v_3)(v_3 - 1) - w_3 - c v_1 & \qquad \dot{w}_3 &= b v_3 - \gamma w_3 \end{aligned} \tag{3}$$

onde v_i é o potencial de membrana da célula i, w_i é um substituto para uma corrente iônica e a,b,γ são parâmetros constantes com $0 < a < 1$, $b < 0$, $\gamma > 0$.

O grupo de simetria é $\mathbb{Z}_3$ gerado pelo 3-ciclo (123) atuando nos pares (v_j, w_j).

Redes Acopladas

Podemos pensar num **diagrama de rede** para o sistema (3) que represente os acoplamentos como mostrado abaixo.



$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f(x_1, x_3),\\
\dot{x}_2 &= f(x_2, x_1),\\
\dot{x}_3 &= f(x_3, x_2),
\end{aligned}
$$

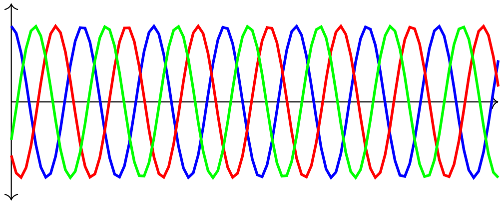
onde os círculos representam células e setas representam os acoplamentos das variáveis nas equações. Como essas entram nas equações do mesmo modo para cada i sujeita à permutação cíclica, as setas exibem o mesmo tipo assim como as células por terem o mesmo *espaço de estados*.

Acima, fazemos $x_j = (v_j, w_j)$ para exibir a forma geral de outros sistemas com essa configuração.

Redes Acopladas

Ressaltamos que, quando $a = b = \gamma = 0.5$ e $c = 2$, o sistema (3) tem um estado periódico estável em que as células sucessivas têm um terço de um período fora de fase. Abaixo mostramos o padrão para v_j; o mesmo padrão ocorre para w_j. Este estado é uma *onda rotativa discreta* que exibe simetria espaço-temporal induzida pela ação de $\mathbb{Z}_3$:

$$x_2(t) = x_1(t - T/3) \qquad x_3(t) = x_1(t - 2T/3)$$



Com as devidas adequações, muitos resultados de dinâmica equivariante se aplicam a redes simétricas. Contudo, poucos modelos em ciências aplicadas exibem simetrias globais.

Em 2002, Marcus Pivato descreveu uma rede de 16 células que tinha um estado periódico em que os nós foram particionados em 4 subconjuntos de 4 nós. [12]

As células em cada partição eram síncronas enquanto células em partições distintas apresentavam a mesma dinâmica a menos de um deslocamento de fase múltiplo de 1/4 do período. Tratava-se de uma onda rotativa induzida por $\mathbb{Z}_4$, exceto pelo fato da rede **não possuir** simetria $\mathbb{Z}_4$.

Por volta de 2003, Marty Golubitsky, Ian Stewart e demais colaboradores propuseram uma teoria para estudar esse tipo de rede partindo da noção de simetria local, estabelecendo o **formalismo via grupoides**. [8, 10]

Matematicamente, uma rede é representada por um grafo direcionado cujos nós e arestas são classificados de acordo com rótulos ou "tipos" associados. Os nós (ou "células") de uma (direcionada e rotulada) rede $\mathcal{G}$ representam sistemas dinâmicos (variáveis de estado) e as arestas ("setas") representam acoplamentos, interações entre essas variáveis.

Formalmente, temos:

Definição de rede

Uma *rede de células acopladas* $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ constitui-se de:

1. Um conjunto finito $\mathcal{C} = \{1, 2, \ldots, n\}$ de células.
2. Um conjunto finito $\mathcal{S}$ de setas.
3. Dois mapas $\mathcal{H} : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ e $\mathcal{T} : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ tais que cada seta $s \in \mathcal{S}$ tem uma *cabeça* $\mathcal{H}(s) \in \mathcal{C}$ e uma *cauda* $\mathcal{T}(s) \in \mathcal{C}$.
4. Uma relação de equivalência $\sim_C$ sobre as células em $\mathcal{C}$ que classifica seu *espaço de fase*.
5. Uma relação de equivalência $\sim_S$ sobre as setas em $\mathcal{S}$ que as classifica de acordo com seus *conjuntos de entrada*.
6. Duas condições de compatibilidade: Se $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ são $\sim_S$-equivalentes, então $\mathcal{H}(s_1)$ e $\mathcal{H}(s_2)$ são $\sim_C$-equivalentes, e do mesmo modo, $\mathcal{T}(s_1)$ e $\mathcal{T}(s_2)$.

Redes Acopladas

Definição de conjunto de entrada

Seja $c \in \mathcal{C}$. O *conjunto de entrada* de c é o conjunto $I(c)$ de todas as setas $s \in \mathcal{S}$ tais que $\mathcal{H}(s) = c$. Ou seja,

$$I(c) = \{s \in \mathcal{S} \mid \mathcal{H}(s) = c\}$$

Definição de isomorfismo de entradas

Um *isomorfismo de entradas* $\beta : I(c) \to I(d)$ é uma bijeção entre conjuntos de entrada que preserva o tipo de seta, ou seja, $s \sim_S \beta(s)$ para todo β e toda seta $s \in I(c)$.

(Note que $\beta^{-1}(s')$ é $\sim_S$-equivalente a s' para todo $s' \in I(d)$)

Se existe um isomorfismo de entradas $\beta : I(c) \to I(d)$ dizemos que c, d são *isomórficas por entradas* ou **equivalentes por entradas**.

Definição de $\sim_E$-equivalência

A relação $\sim_E$ de equivalência por entradas em $\mathcal{C}$ é definida por $c \sim_E d$ se, e somente se, existe uma bijeção

$$\beta : I(c) \to I(d)$$

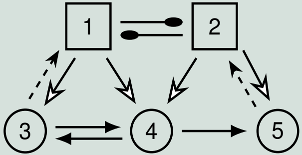
tal que, para cada $i \in I(c)$,

$$i \sim_S \beta(i)$$

Redes Acopladas

Exemplo

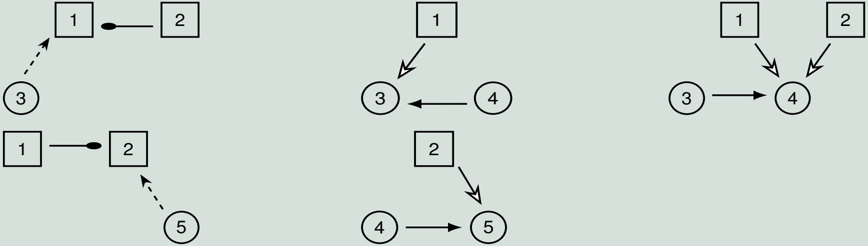
Seja $\mathcal{G}$ a rede exibida abaixo:



Vemos que as células 1 e 2 são isomórficas por entradas, assim como as células 3 e 5. Porém, as células 1 e 3 não são isomórficas por entradas. Apesar de ambas receberem duas entradas, os tipos de seta são diferentes.

Redes Acopladas

Exemplo



Da esquerda para a direita: $I(1)$, $I(3)$, $I(4)$, $I(2)$, $I(5)$.

Estritamente, as setas constituem o conjunto de entradas mas é conveniente também mostrar as células da cabeça e cauda delas.

O conjunto de todos os isomorfismos de entradas da célula c para a célula d é denotado por $B(c,d)$. Tais mapas são fechados por composição do seguinte modo:

se a, b e c são células $\sim_E$-equivalentes, e $\alpha \in B(a,b)$ e $\beta \in B(b,c)$, então $\beta\alpha \in B(a,c)$. Tal composição nem sempre pode ser definida, mas quando é, essa é também associativa.

Disso segue que, para qualquer célula $c \in \mathcal{C}$, o conjunto $B(c,c)$ é um grupo finito, chamado o *grupo de vértice* de c.
A união

$$\mathcal{B}_{\mathcal{G}} = \bigcup_{c,d \in \mathcal{C}} B(c,d)$$

dos conjuntos de isomorfismos de entradas forma o **grupoide de simetria** da rede.

Pode parece natural imaginar que o grupoide de simetria tenha um comportamento similar ao do grupo de simetria quanto ao fato de uma dada função ser Γ-equivariante.

Porém, na prática não temos como definir de modo explicito a “ação” do grupoide no espaço de fase do sistema. (Exceto em casos a parte que exibem *simetria interior*, um meio termo entre redes simétricas e redes mais gerais. [3]).

De modo geral, o grupoide de simetria ajuda a organizar uma eventual análise da estrutura da rede combinando a noção de componente conexa de um grafo com o fechamento algébrico de um grupo.

Veremos agora como a sincronia se manifesta em redes.

Uma **polidiagonal** é um subespaço

$$\Delta = \{x \mid x_c = x_d \text{ para alguns subconjuntos de células}\}$$

Um **subespaço de sincronia** é uma polidiagonal fluxo-invariante.

Teorema

Seja Σ um subgrupo do grupo de simetria Γ. Então $\text{Fix}(\Sigma) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \sigma x = x \quad \forall \sigma \in \Sigma\}$ é fluxo-invariante.

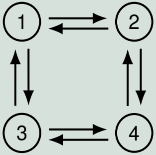
Prova: Segue de (2) já que $f(x) = f(\sigma x) = \sigma f(x)$.

Corolário

Seja σ uma permutação. Então Fix(σ) é uma polidiagonal.

Exemplo

Considere a rede abaixo:



Fix$((2,3),(1,4)) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 = x_3; x_1 = x_4\}$

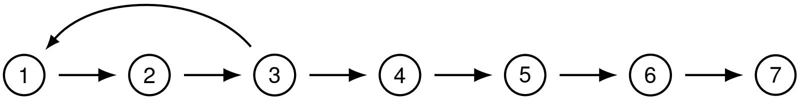
Um resultado a considerar em redes simétricas é o:

Teorema H/K

Seja Γ um grupo de simetria finito e $K \subset H \subset \Gamma$ um par de subgrupos. Então existem soluções periódicas para algum sistema de células acopladas com simetria espaço-temporal H e simetria espacial K se, e somente se, H/K é cíclico e K é um subgrupo isotrópico.

Apesar de não haver um análogo desse resultado para redes mais gerais, há uma condição que pode atuar no papel do subgrupo K e induzir um estado de sincronia, como veremos a seguir.

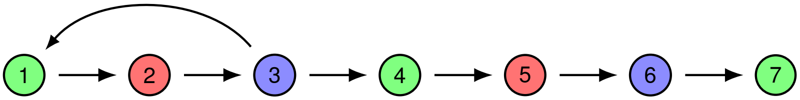
Considere a seguinte rede do tipo “alimetação direta” (feed-forward) com suas funções admissíveis:



$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_3), \qquad \dot{x}_2 = f(x_2, x_1), \qquad \dot{x}_3 = f(x_3, x_2),$$
$$\dot{x}_4 = f(x_4, x_3), \qquad \dot{x}_5 = f(x_5, x_4), \qquad \dot{x}_7 = f(x_7, x_6),$$
$$\dot{x}_7 = f(x_7, x_6),$$

Podemos particionar essa rede usando **colorações** onde
$\Delta = \{x \mid x_1 = x_4 = x_7; x_2 = x_5; x_3 = x_6\}$ é fluxo-invariante.

Considere a seguinte rede do tipo “alimetação direta” (feed-forward) com suas funções admissíveis:



$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f(x_1, x_3), & \dot{x}_2 &= f(x_2, x_1), & \dot{x}_3 &= f(x_3, x_2),\\
\dot{x}_4 &= f(x_4, x_3), & \dot{x}_5 &= f(x_5, x_4), & \dot{x}_7 &= f(x_7, x_6),\\
\dot{x}_7 &= f(x_7, x_6), & & & &
\end{aligned}
$$

Podemos particionar essa rede usando **colorações** onde $\Delta = \{x \mid x_1 = x_4 = x_7; x_2 = x_5; x_3 = x_6\}$ é fluxo-invariante.

Definição (coloração)

Uma *coloração* de uma rede $\mathcal{G}$ é um mapa

$$\kappa : \mathcal{C} \to K$$

onde K é um conjunto cujos elementos são chamados *cores*.

Dizemos que c e d *tem a mesma cor* se $\kappa(c) = \kappa(d)$ e escrevemos $c \sim_\kappa d$ (equivalência por cores).

Uma coloração κ é *balanceada* se, sempre que c e d tem a mesma cor, então existe um isomorfismo de entradas $\beta : I(c) \to I(d)$ tal que i e $\beta(i)$ têm a mesma cor para todo $i \in \mathcal{T}(I(i))$.

Sincronia e Colorações

Na prática, uma coloração é balanceada se existe um isomorfismo de entradas que preserva cores de quaisquer duas células de mesma cor. Como células da mesma cor devem ser equivalentes por entradas, uma coloração balanceada é um refinamento da equivalência de entradas.

A *polidiagonal* definida por uma coloração κ de $\mathcal{G}$ é o espaço

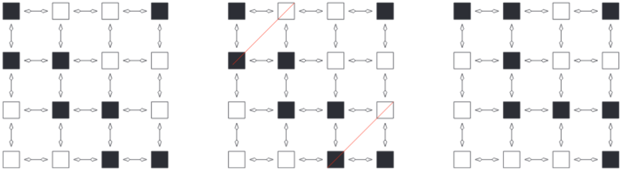
$$\Delta_\kappa = \{x \mid \kappa(c) = \kappa(d) \implies x_c = x_d\}$$

Ou seja, células da mesma cor são síncronas para $x \in \Delta_\kappa$.

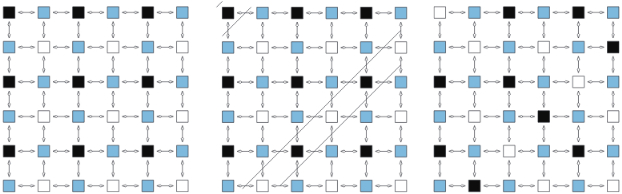
Teorema

Uma polidiagonal Δ_κ é invariante para toda função admissível se, e somente se, κ é balanceada.

Aplicações
Sistemas Dinâmicos Reticulados - SDR

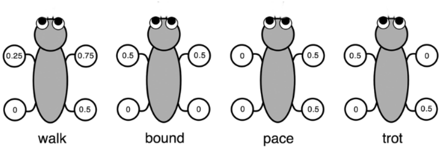


(a) (b) (c)

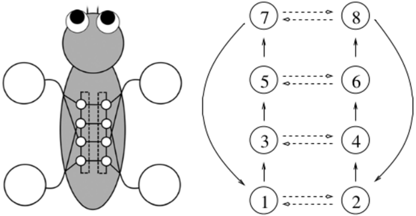


(a) (b) (c)

Aplicações
CPG - Gerador Central de Padrões para locomoção animal

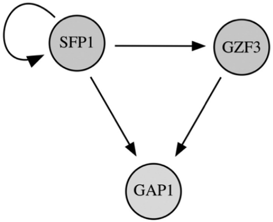


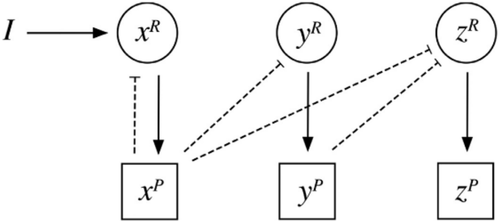
(a)



(b)

Antoneli et al.[2] propõem uma rede de regulação genética que simula a homeostase em seres unicelulares como a Saccharomyces cerevisiae usando a noção de *homeostase infinitesimal* para permitir o uso de derivação implícita para achar regiões de homeostase.





Bibliografia I

[1] F. Antoneli, I. Stewart. *Symmetry and synchrony in coupled cell networks 1: Group networks*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 16, No. 3 (2006), 559–577.

[2] F. Antoneli, M. Golubitsky and I. Stewart. *Homeostasis in a feed forward loop gene regulatory network motif*. J. Theoretical Biology. 445 (2018) 103-109; DOI:10.1016/j.jtbi.2018.02.026

[3] F. Antoneli, A.P.S. Dias, and R. Paiva. *Hopf Bifurcation in Coupled Cell Networks with Interior Symmetries*. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, Vol. 7, No. 1 (2008), 220-248.

[4] H. Brandt. *Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes*, Math. Ann. 96 (1927), 360–366.

[5] R. Brown. *From groups to groupoids: A briefsurvey*, Bull. London Math. Soc. 19 (1987), 113–134.

Bibliografia II

[6] A.P.S. Dias, I. Stewart. *Symmetry groupoids and admissible vector fields for coupled cell networks*. J. London Math. Soc. 69 no. 3 (2004) 707–736.

[7] P. J. Higgins, *Notes on Categories and Groupoids*, Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies 32, Van Nostrand Reinhold, London, (1971).

[8] M. Golubitsky, I. Stewart. *Nonlinear dynamics of networks: the groupoid formalism*. Bull. Amer. Math. Soc. 43 (2006) 305–364.

[9] M. Golubitsky, I. Stewart, and D. Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory: Vol. 2.*, Appl. Math. Sci. 69, Springer-Verlag, New York, (1988).

[10] M. Golubitsky, I. Stewart, and A. Török. *Patterns of synchrony in coupled cell networks with multiple arrows*, SIAM J. Appl. Dyn. Sys. 4(1) (2005) 78–100.

[11] J. Meiss. *Differential dynamical systems*. Vol. 14. SIAM; (2007).

Bibliografia III

[12] I. Stewart, M. Golubitsky, M. Pivato. *Symmetry groupoids and patterns of synchrony in coupled cell networks*. SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2 no. 4 (2003) 609–646.

[13] A. Weinstein, *Groupoids: Unifying internal and external symmetry*, Notices Amer. Math. Soc., 43 (1996), pp. 744–752.

UNIFESP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

1933

Grato pela atenção!