Câmpus Nordeste
UnU - Posse
Universidade Estadual de Goiás

Contagem $\wedge$ Grafos

Prof. Antonio Melo
antonio@ueg.br

November 24, 2024

O **Princípio Fundamental da Contagem** também chamado de princípio multiplicativo, é uma técnica de contagem que serve como base de toda a análise combinatória. Por isso, precisamos compreendê-lo bem.

Suponhamos que existam N resultados possíveis ao se realizar uma tarefa $T1$ e M resultados possíveis ao se realizar uma tarefa $T2$. Então, o número de resultados possíveis ao se realizar a tarefa $T1$ seguida da tarefa $T2$ é obtido pela multiplicação $N \times M$.

Tarefa T1 tem 'N' resultados possíveis

\+

Tarefa T2 tem 'M' resultados possíveis

→

Ao se executar T1 e depois T2, existem **'N x M'** resultados possíveis

Exemplo 1

Um restaurante possui em seu cardápio 4 tipos de pratos principais e 3 tipos de sobremesas diferentes. Uma pessoa deseja almoçar nesse restaurante e, para isso, pedirá um prato principal e uma sobremesa. De quantas maneiras diferentes esse pedido poderá ser feito?

Exemplo 1

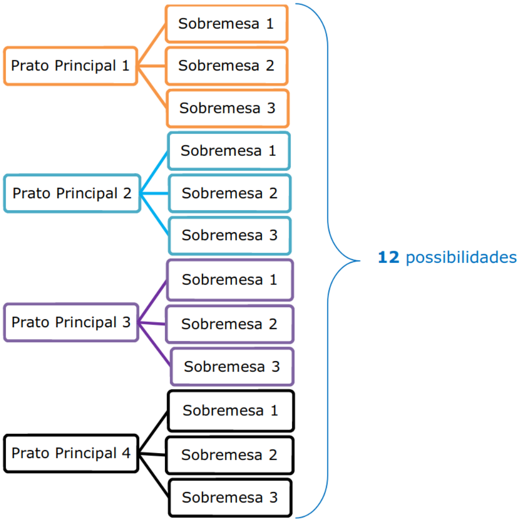
Um restaurante possui em seu cardápio 4 tipos de pratos principais e 3 tipos de sobremesas diferentes. Uma pessoa deseja almoçar nesse restaurante e, para isso, pedirá um prato principal e uma sobremesa. De quantas maneiras diferentes esse pedido poderá ser feito?

Solução: O pedido será composto por um prato principal (tarefa $T1$) e uma sobremesa (tarefa $T2$). O número de resultados possíveis N do prato principal é 4. E o número de resultados possíveis M para a sobremesa é 3. Segundo o PFC, o pedido poderá ser feito de $N \times M$ maneiras diferentes, ou seja, $4 \cdot 3 = 12$ maneiras.

Uma das formas de visualizarmos isso é por meio do chamado *diagrama sequencial* ou *diagrama de árvore* como mostrado a seguir:

Princípio Fundamental da Contagem - PFC

Exemplos



De modo geral, temos que

Pricípio Fundamental da Contagem

Se uma tarefa T_1 pode ter N_1 resultados diferentes, uma tarefa T_2 pode ter N_2 resultados diferentes, e assim sucessivamente, então, ao se realizar em sequência as tarefas T_1, T_2, até T_k, o número de resultados possíveis será $N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_k$.

Princípio Fundamental da Contagem - PFC
Exemplos

De modo geral, temos que

Pricípio Fundamental da Contagem

Se uma tarefa T_1 pode ter N_1 resultados diferentes, uma tarefa T_2 pode ter N_2 resultados diferentes, e assim sucessivamente, então, ao se realizar em sequência as tarefas T_1, T_2, até T_k, o número de resultados possíveis será $N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_k$.

Para esclarecer esse conceito, vamos consultar outro exemplo.

Exemplo 2

De quantas maneiras podem ser confeccionadas as placas de identificação dos veículos, que contém três letras e quatro números?


Solução: Vamos chamar a primeira letra de tarefa T_1, a segunda letra de T_2, a terceira letra de T_3, o primeiro dígito de T_4, o segundo dígito de T_5, o terceiro dígito de T_6, e o quarto dígito de T_7. O número de letras possíveis de serem colocadas na tarefa T1 é igual a 26 (chamamos de N_1). O mesmo número se aplica a N_2 e a N_3. No caso de N_4, temos dez possibilidades $(0, 1, 2, \ldots, 9)$, o mesmo número se aplica a N_5, N_6, e N_7.

Segundo o PFC, o número de resultados possíveis é:

$$N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot N_4 \cdot N_5 \cdot N_6 \cdot N_7 = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175.760.000$$

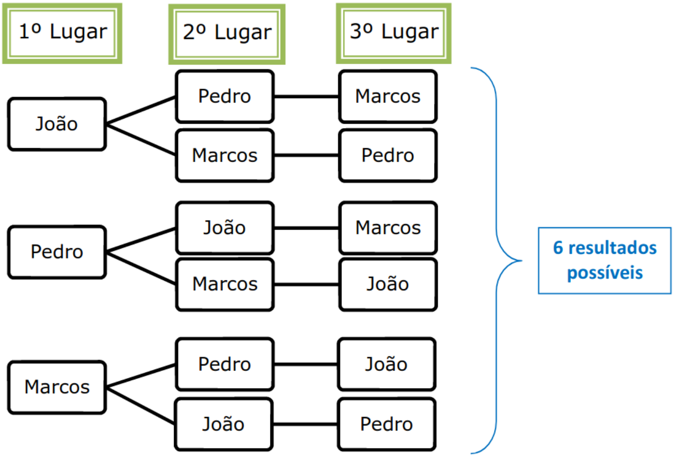
Dessa forma, podemos confeccionar as placas de veículos de 175.760.000 maneiras diferentes!

Suponhamos que um determinado conjunto possua n elementos. A **permutação** permite contar o número de maneiras diferentes que esses elementos podem estar ordenados dentro desse conjunto. Vamos trazer um exemplo para esclarecer melhor.

Exemplo 3

João, Pedro e Marcos são três amigos que resolvem competir andando de kart. De quantas maneiras diferentes o resultado dessa corrida pode acontecer?

Neste caso, temos um conjunto composto por três elementos (João, Pedro, Marcos), ou seja, $n = 3$. Podemos resolver esse problema utilizando o diagrama de árvore como a seguir.


1º Lugar
2º Lugar
3º Lugar
João
Pedro
Marcos
Marcos
Pedro
Pedro
João
Marcos
Marcos
João
Marcos
Pedro
João
João
Pedro
6 resultados possíveis

Outra forma de resolvermos esse problema é por meio da técnica de contagem chamada de **permutação**, que representa o número de maneiras diferentes de ordenar um conjunto. Para calcularmos o número de permutações no nosso problema, utilizamos a seguinte fórmula:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Portanto, o número de permutações possíveis em um conjunto de 3 elementos é representado pelo fatorial do número 3, o que representa um total de 6 permutações.

Dado um conjunto de n elementos, o número de permutações possíveis nesse conjunto é representado pela expressão:

$$P_n = n!$$

onde $n!$ é o fatorial do número n, representado pela expressão:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

Exemplo 4

De quantas formas 6 pessoas podem ser ordenadas em fila?

$$P_n = n!$$

onde $n!$ é o fatorial do número n, representado pela expressão:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

Exemplo 4

De quantas formas 6 pessoas podem ser ordenadas em fila?

Solução: Neste caso, temos um conjunto com 6 elementos e desejamos saber de quantas formas esses 6 elementos podem ficar ordenados. Como o número de elementos coincide com o número de posições, temos uma permutação. Assim, precisamos calcular quantas permutações podem ser feitas com 6 elementos. Aplicando a fórmula $P_n = n!$, temos:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Suponhamos um conjunto com os seguintes elementos $\{1, 2, 3, 3, 4, 5\}$. Se quisermos calcular o número de permutações que são possíveis neste conjunto, teremos um problema, já que o número 3 repete-se duas vezes nesse conjunto.

Para esses problemas com repetição, o número de permutações deve ser calculado pela expressão:

$$P_n^{(a,b,\ldots)} = \frac{n!}{a!\,b!\ldots}$$

Onde n é o número total de elementos, a representa o **número de repetições** que possui um determinado elemento, e b o número de repetições de outro elemento, e, assim, sucessivamente.

Para praticar, vamos resolver o problema inicialmente proposto.

Exemplo 5

Dado o conjunto $\{1, 2, 3, 3, 4, 5\}$, de quantas formas podemos ordená-los de maneira diferente?

Exemplo 5

Dado o conjunto $\{1, 2, 3, 3, 4, 5\}$, de quantas formas podemos ordená-los de maneira diferente?

Solução: O número de elementos do conjunto é 6. Então $n = 6$. Existe apenas um elemento repetido, o elemento "3", o qual se repete duas vezes, então $a = 1$. Aplicando-se a fórmula da permutação com repetição, temos:

$$P_n^{(a)} = P_6^{(2)} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 360.$$

Exemplo 7

Dado o conjunto $\{X, P, P, R, R, R, W, W, W, G\}$, de quantas formas podemos ordená-los de maneira diferente?

Exemplo 7

Dado o conjunto $\{X, P, P, R, R, R, W, W, W, G\}$, de quantas formas podemos ordená-los de maneira diferente?

Solução: Neste problema, o número de elementos do conjunto é igual a 10. Então, $n = 10$. Existem três elementos que se repetem: as letras P, R e W. Assim, o número de repetições (a, b, c) de cada um desses elementos é $(2, 3, 3)$.

Conhecidos os valores de n, e do número de repetições, podemos aplicar a fórmula:

$$P_n^{(a,b,c)} = P_{10}^{(2,3,3)} = \frac{10!}{2!3!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1)(3 \cdot 2 \cdot 1)(3 \cdot 2 \cdot 1)} = 50400.$$

Portanto, podemos ordenar esse conjunto de 50.400 maneiras diferentes.

O Arranjo é outra técnica de contagem, por meio da qual conseguimos contar o número de maneiras diferentes de selecionar r elementos, em uma determinada ordem, pertencentes a um conjunto com n elementos. Neste caso $n \geq r$ (n representa todo o conjunto e r uma parte dele).

Vamos trazer uma situação prática para poder esclarecer essa definição.

Exemplo 8

Suponhamos que os moradores de um condomínio devam eleger um síndico e um subsíndico. Há 6 candidatos para esses cargos. Quantos são os resultados possíveis dessa eleição?

Solução: Utilizando a técnica de contagem por arranjo, ao selecionarmos r elementos em uma determinada ordem, pertencentes a um conjunto com n elementos, o número de possibilidades, ou, arranjos possíveis, é dado pela fórmula:

$$A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

onde a expressão $A_{n,r}$ significa: arranjo de n elementos tomados r a r.

Aplicando essa fórmula para o nosso exemplo, temos:

$$A_{n,r} = A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 30.$$

Portanto, existem 30 possibilidades de escolha.

Exemplo 9

(FGV-SEFAZ/RJ-2011) Quantas combinações existem para determinar o primeiro e o segundo lugares de um concurso com 10 pessoas? (O primeiro e o segundo lugares não podem ser a mesma pessoa).

(A)18 (B) 90 (C) 19 (D) 680 (E) 180

Exemplo 9

(FGV-SEFAZ/RJ-2011) Quantas combinações existem para determinar o primeiro e o segundo lugares de um concurso com 10 pessoas? (O primeiro e o segundo lugares não podem ser a mesma pessoa).

(A)18 (B) 90 (C) 19 (D) 680 (E) 180

Solução: O conjunto é formado por 10 pessoas, então, $n = 10$. Além disso, é importante observar que a ordem dos elementos importa, pois o resultado em que um candidato "A" fique em primeiro, e um candidato "B" fique em segundo, é diferente do resultado em que "B" fique em primeiro, e "A" em segundo. Neste caso, como **a ordem dos elementos altera o resultado**, podemos aplicar rapidamente a fórmula do arranjo, para contar o número de arranjos que podemos fazer com os dois primeiros lugares ($r = 2$):

$$A_{n,r} = A_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 90.$$

A **combinação** é outra técnica de contagem, por meio da qual é possível obter o número de possibilidades de se retirar r elementos de um conjunto com n elementos ($r \leq n$). Percebam que esta definição é semelhante a do Arranjo, no entanto, a diferença é que, para a combinação, **não importa a ordem de retirada dos elementos**.

Vamos a um exemplo para ajudar no entendimento:

Exemplo 10

Deseja-se formar uma comissão com três pessoas e dispõe-se de cinco funcionários. Quantas comissões podem ser formadas?

Solução: Pretende-se formar uma comissão, escolhendo três pessoas ($r = 3$) dentro de um conjunto de cinco pessoas ($n = 5$). Percebam que não importa a ordem que essas pessoas serão escolhidas. Esse é um caso, portanto, de utilizar a técnica da combinação. A combinação de r elementos a partir de um conjunto com n elementos é dado pela expressão:

$$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Aplicando a fórmula, encontramos a resposta para o problema proposto:

$$C_{n,r} = C_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1)(3 \cdot 2 \cdot 1)} = 10$$

Desse modo, podem ser formadas 10 comissões diferentes. Supondo-se um conjunto com os cinco funcionários da forma {A, B, C, D, E}, as combinações possíveis são:

{A, B, C}, {A, B, D}, {A, B, E}, {A, C, D}, {A, C, E}, {A, D, E}, {B, C, D}, {B, C, E}, {B, D, E}, {C, D, E}.

Exemplo 11

(FCC-SEED/SE-2003) Uma prova consta de 6 questões de Matemática e 7 de Física. Cada aluno deve escolher 4 questões de Matemática e 2 de Física para responder. Quantas opções diferentes de escolha tem cada aluno?

(A)21. (B) 45. (C) 250. (D) 315. (E) 1680.

Exemplo 11

(FCC-SEED/SE-2003) Uma prova consta de 6 questões de Matemática e 7 de Física. Cada aluno deve escolher 4 questões de Matemática e 2 de Física para responder. Quantas opções diferentes de escolha tem cada aluno?

(A)21. (B) 45. (C) 250. (D) 315. (E) 1680.

Solução: Para as 4 questões de matemática, temos:

$$C_{n,r} = C_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!4!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1)(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 15.$$

Cada aluno deve escolher 2 questões de Física em um conjunto de 7 questões. Aplicamos, também, a fórmula da combinação para calcular o número de maneiras diferentes de se escolher as questões da prova de física. Temos assim:

$$C_{n,r} = C_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!2!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)(2 \cdot 1)} = 21.$$

Aplicando-se o PFC, o número total de possibilidades é obtido pela multiplicação das possibilidades de cada tarefa. Ou seja,

$$15 \cdot 21 = 315$$

Resumo

Princípio Fundamental da Contagem → O número de maneiras de se realizar uma tarefa T1, seguida da tarefa T2, é obtido pela multiplicação do número de maneiras de se fazer cada uma dessas tarefas.

Permutação → Permite **contar o número de maneiras diferentes** que os elementos de um conjunto podem estar ordenados.

Permutação → $\mathbf{P_n = n!}$ (simples)

$\mathbf{P_n^{a,b,\ldots} = n!\,/(a!\,b!\ldots)}$ (com repetição)

Arranjo → Permite contar, ***em uma determinada ordem***, o número de maneiras diferentes de selecionar "r" elementos dentro de um conjunto com "n" elementos.

Arranjo → $\mathbf{A_{n,\,r} = n!/(n-r)!}$

Combinação → Permite contar, ***independente da ordem***, o número de maneiras diferentes de selecionar "r" elementos dentro de um conjunto com "n" elementos.

Combinação → $\mathbf{C_{n,\,r} = n!/(n-r)!r!}$

Câmpus Nordeste
UnU - Posse
Universidade Estadual de Goiás

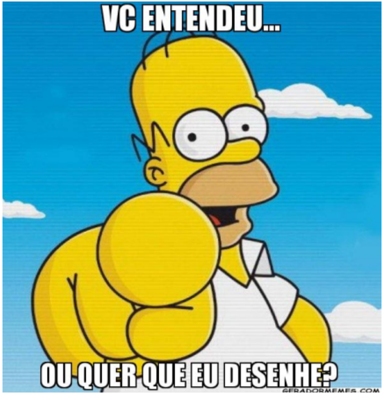
Grafos

O que são grafos?

Quatro alunos P1, P2, P3 e P4, desejam utilizar o computador para realizar seus trabalhos. No laboratório existem quatro computadores M1, M2, M3 e M4. Entretanto, os programas instalados em cada computador são diferentes e os alunos não possuem permissão para instalar novos programas. O aluno P1 precisa de um programa que está instalado em M1 e M4. O aluno P2 precisa de um programa que está instalado em M2 e M3. O aluno P3 precisa de um programa que está instalado em M1 e M4. O aluno P4 precisa de um programa que está instalado em M3 e M4.

Como podemos alocar cada aluno em um computador, de forma que todos tenham suas necessidades atendidas?

O que são grafos?

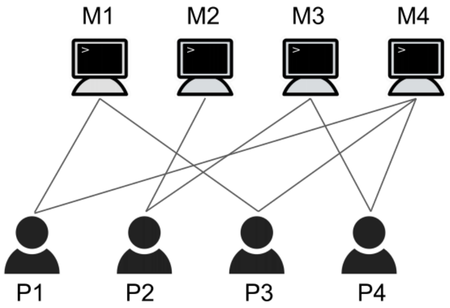


Em outras palavras...

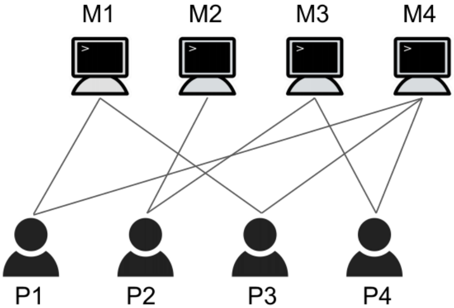
Em algumas situações, figuras valem mais que mil palavras!

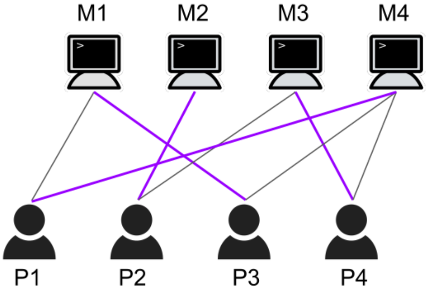
Exemplo

- P1 precisa de um programa que está instalado em M1 e M4;
- P2 precisa de um programa que está instalado em M2 e M3;
- P3 precisa de um programa que está instalado em M1 e M4; e
- P4 precisa de um programa que está instalado em M3 e M4.



Exemplo



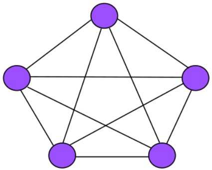


Exemplo

Definição informal

Um grafo é composto por:

- um conjunto de pontos (vértices),
- um conjunto de linhas que ligam os pontos (arestas).

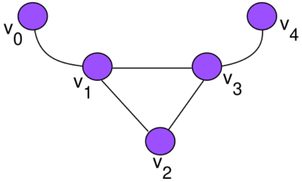


O que é um grafo?

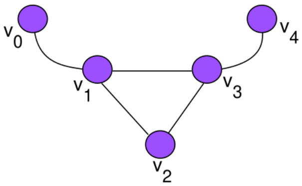
Definição formal

Um grafo $G = (V(G), E(G))$ é uma estrutura matemática composta por dois conjuntos:

- $V(G)$, um conjunto de elementos que são chamados de vértices,
- $E(G)$, um conjunto de pares de elementos de $V(G)$, onde cada par é chamado de aresta.



O que é um grafo?



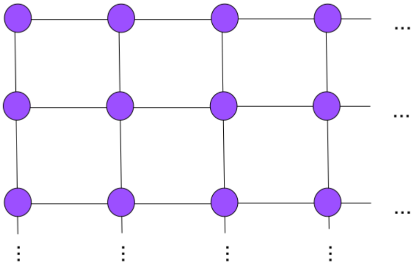
$G = (V(G), E(G))$, onde:

- $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$
- e $E(G) = \{v_0 v_1, v_1 v_2, v_1 v_3, v_2 v_3, v_3 v_4\}$.

O que é um grafo?

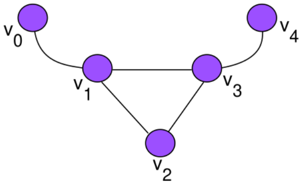
O conjunto dos vértices pode ser infinito.
Nesse caso o grafo é chamado de **grafo infinito**.

Exemplo: $G = (V(G), E(G))$, onde $V(G) = \{v_{ij} \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$ e
$E(G) = \{(v_{ij}, v_{i(j+1)}) \mid i, j \in \mathbb{Z}\} \cup \{(v_{ij}, v_{(i+1)j}) \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$.



Conceitos básicos

Dois vértices conectados por uma aresta são chamados de **adjacentes** ou **vizinhos**. Uma aresta vw é dita **incidente** em v e em w.

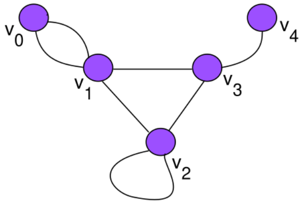


Os vértices v_1 e v_3 são vizinhos (ou adjacentes) e a aresta $v_1 v_3$ é incidente nos vértices v_1 e v_3.

Conceitos básicos

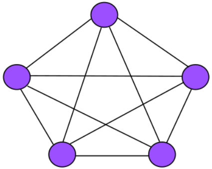
Arestas múltiplas: mais de uma aresta entre o mesmo par de vértices.

Laço: aresta definida por um par de vértices não distintos.



A aresta v_2v_2 é um laço e entre os vértices v_0 e v_1 temos arestas múltiplas.

Um grafo é **simples** se não possui laços ou arestas múltiplas.



Conceitos básicos

As relações (arestas) entre os elementos (vértices) de um modelo (grafo) podem não ser simétricas.

Exemplos de relações que não são simétricas:

- mapa rodoviário (tem vias com sentido único);
- relação de conhecer um indivíduo (artistas são bastante conhecidos, mas não conhecem todo mundo);
- relação de ser chefe (é uma hierarquia, em geral, alguém é mandado e não é chefe de ningúem).

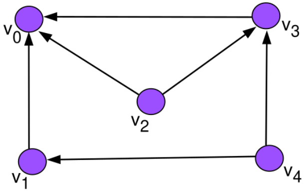
Conceitos básicos

Para representar relações assimétricas, as arestas são **pares ordenados** de vértices.

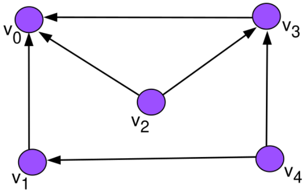
A ordem dos vértices de uma aresta orientada (a, b) indica que o sentido da relação é de a para b.

Uma aresta orientada também é chamada na literatura de **arco** ou **seta**.

Um grafo com orientação nas arestas é chamado de **grafo orientado** ou **digrafo** ou **grafo direcionado**.



Conceitos básicos



$$G = (V(G), E(G))$$
$$V(G) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E(G) = \{(v_1, v_0), (v_2, v_0), (v_2, v_3), (v_3, v_0), (v_4, v_1), (v_4, v_3)\}$$

Conceitos básicos

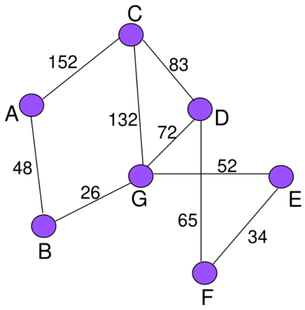
Em alguns casos, é necessário atribuir um custo para o vértice, ou para a aresta ou para ambos.

Por exemplo, podemos querer representar quantos quilômetros de rodovia existem entre quaisquer duas cidades de um mapa rodoviário.

Grafos com valores nos vértices, arestas ou ambos são **grafos ponderados**.

Exemplo de grafo ponderado.

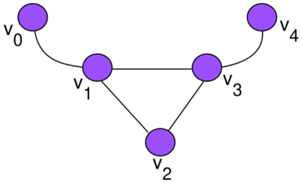
Repare que as arestas não precisam ser proporcionais aos valores informados, pois a principal função do desenho é ilustrar quem está conectado a quem.



Representação de grafos

As formas mais comuns de representação de grafos são:

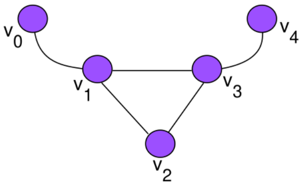
- matriz de adjacência: uma matriz $M_{|V(G)|\times|V(G)|}$, onde $m_{i,j} = 1$ se existe aresta entre v_i v_j e $m_{i,j} = 0$ caso contrário.
- matriz de incidência: uma matriz $M_{|V(G)|\times|E(G)|}$, onde $m_{i,j} = 1$ se v_i é um dos vértices da aresta e_j . (dizemos que a aresta e_j incide no vértice v_i)



Matriz de adjacência:

	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_0					
v_1					
v_2					
v_3					
v_4					

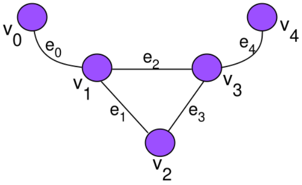
Representação de grafos



Matriz de adjacência:

	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_0	0	1	0	0	0
v_1	1	0	1	1	0
v_2	0	1	0	1	0
v_3	0	1	1	0	1
v_4	0	0	0	1	0

Representação de grafos



Matriz de incidência:

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4
v_0	1	0	0	0	0
v_1	1	1	1	0	0
v_2	0	1	0	1	0
v_3	0	0	1	1	1
v_4	0	0	0	0	1

Representação de grafos

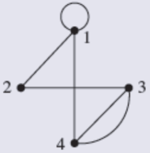
Computacionalmente, além da representação através de matrizes, o grafo pode ser representado por uma lista de adjacências.

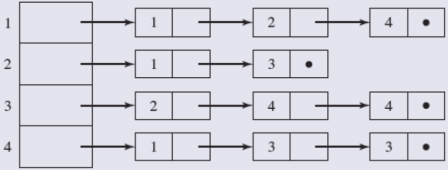
A estrutura de dados utilizada é um vetor com $|V(G)|$ posições, onde a posição i contém o endereço de uma lista ligada onde cada elemento é um vizinho do vértice i.

Representação de grafos

Exemplo

A lista de adjacência para o grafo abaixo contém uma tabela de ponteiros com quatro elementos, um para cada vértice. O ponteiro de cada vértice aponta para um vértice adjacente, que aponta para outro vértice adjacente e assim por diante. A estrutura de lista de adjacência está ilustrada ao lado.

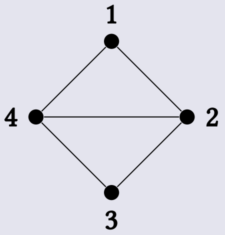




Na figura, o ponto indica um ponteiro nulo, que significa que não há nada mais a se indicar, ou que se chegou ao final da lista. Note que a seta na lista 1 do vértice 2 para o vértice 4 não significa que existe um arco do vértice 2 para o vértice 4; todos os elementos na lista do vértice 1 são adjacentes ao vértice 1, não necessariamente entre si.

Exercício

Desenhe a lista de adjacência para o grafo ilustrado ao lado.



Faça o mesmo para o grafo ponderado ilustrado anteriormente com a seguinte modificação: para cada registro na lista, a primeira componente é o vértice, a segunda é o peso do arco que termina no vértice e a terceira é o ponteiro.

Bibliografia I

[1] GERSTING, J. L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação um tratamento moderno de matemática discreta. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

[2] GOMIDE, A.; STOLFI, J. Elementos de Matemática Discreta para Computação. UNICAMP, 2021.

[3] LIMA, Elon *et al.* A Matemática do Ensino Médio. Vol 2. 11a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[4] PAIVA, Manuel. Volume único: Matemática: Ensino médio. Editora Moderna, São Paulo, 2003.

[5] ROSEN, K. H. Matemática Discreta e suas Aplicações. AMGH Editora Ltda, 2010.

Câmpus Nordeste
UnU - Posse

Universidade Estadual de Goiás

Grato pela atenção!