Exercícios — Técnicas de Demonstração

Método Direto

1 Demonstre que o produto de um inteiro par por um inteiro ímpar é par.

Seja $n, m \in \mathbb{Z}$. Suponha que n é par, ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$ e que m é ímpar, ou seja, existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tal que $m = 2\ell + 1$.

Deste modo, o produto $n \cdot m$ é $2k(2\ell + 1) = 2(2k\ell + k)$. Como $2kl + k \in \mathbb{Z}$, temos que $n \cdot m$ é par.

2 Prove que o produto de dois inteiros ímpares é ímpar.

Seja $n, m \in \mathbb{Z}$. Suponha que n é ímpar, ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$ e que m é ímpar, ou seja, existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tal que $m = 2\ell + 1$.

Deste modo, o produto $n \cdot m$ é $(2k+1)(2\ell+1) = 4k\ell+2k+2\ell+1 = 2(2k\ell+k+\ell)+1$. Como $2kl+k+\ell \in \mathbb{Z}$, temos que $n \cdot m$ é ímpar.

3 Demonstre que se r é um número racional diferente de zero, então $\frac{1}{r}$ é racional.

Seja $r \in \mathbb{Q}^*$, ou seja, existem $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $r = \frac{a}{b}$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Deste modo, $\frac{1}{r} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = 1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$, ou seja, $\frac{1}{r} \in \mathbb{Q}$.

4 Seja x um número inteiro. Prove que x é ímpar se e somente se existe um número inteiro b de modo que $x = 2b - 1$.

($\Rightarrow$) Seja $x \in \mathbb{Z}$. Se que x é ímpar, ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2k + 1$. Como k é um inteiro qualquer, podemos escrever $k = b - 1$ para algum $b \in \mathbb{Z}$. Substituindo isso, temos $x = 2k + 1 = 2(b - 1) + 1 = 2b - 2 + 1 = 2b - 1$ como desejado.

($\Leftarrow$) Seja $b \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2b-1$. Como b é um inteiro qualquer, podemos escrever $b = k + 1$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Substituindo isso, temos $x = 2b - 1 = 2(k + 1) - 1 = 2k + 2 - 1 = 2k + 1$, ou seja, x é ímpar como queríamos mostrar.

Método da Contrapositiva

5 Para todo número inteiro n, se n^2 é ímpar, então n é ímpar.

Seja $n \in \mathbb{Z}$. Suponha que n não é ímpar, ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$. Então $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, ou seja, n^2 não é ímpar. Assim, por contrapositiva obtemos o resultado desejado.

6 Demonstre que, para todo inteiro n, se $n^3 + 5$ é ímpar, então n é par.

Seja $n \in \mathbb{Z}$. Suponha que n não é par, ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k+1$. Então $n^3+5 = (2k+1)^3+5 = 8k^3+12k^2+6k+1+5 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 6 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k + 3)$, ou seja, $n^3 + 5$ não é ímpar. Assim, por contrapositiva temos a conclusão desejada.

7 Prove a seguinte sentença por contraposição.

Seja x um número inteiro. Se $x^2 + x + 1$ é par, então x é ímpar.

Suponha que x não é ímpar, ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$. Então $x^2+x+1 = (2k)^2+2k+1 = 4k^2+2k+1 = 2(2k^2+k)+1$, ou seja, x^2+x+1 não é par. Assim, por contrapositiva temos a conclusão desejada.

Método de redução ao absurdo

8 Demonstre que a soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.

Seja $r \in \mathbb{Q}$, ou seja, existem $a, b \in \mathbb{Z}^*$ tais que $r = \frac{a}{b}$ e $\delta \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Suponha que $r + \delta$ não é irracional, ou seja, existem $x, y \in \mathbb{Z}^*$ tais que $r + \delta = \frac{x}{y}$. Então $\frac{a}{b} + \delta = \frac{x}{y} \Rightarrow \delta = \frac{x}{y} - \frac{a}{b}$. Uma vez que a subtração de números racionais é um número racional, $\delta = \frac{x}{y} - \frac{a}{b}$ nos levaria a concluir que δ é racional (absurdo!). Logo, a soma de um racional com um irracional é um irracional.

9 Demonstre que o número $\sqrt{2}$ é irracional.

Como todo número racional não-nulo pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$ com $mdc(p, q) = 1$, podemos supor que $mdc(p, q) = 1$.

Suponha que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Então $(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$, o que nos levaria a concluir que p é par. Ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2k$. Daí, teríamos que $p^2 = 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$. Ou seja, q seria par. Isso nos leva a um absurdo, pois significa que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $2m = mdc(p, q) = 1$. Portanto, $\sqrt{2}$ é irracional.

10 Demonstre (por meio de contra-exemplos) que as seguintes conjeturas são falsas:

a) Todo inteiro positivo é soma dos quadrados de três inteiros. Repare que

$$1 = 1^2 + 0^2 + 0^2$$
$$2 = 1^2 + 1^2 + 0^2$$
$$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$$
$$4 = 2^2 + 0^2 + 0^2$$
$$5 = 2^2 + 1^2 + 0^2$$
$$6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$$

Porém, 7 não pode ser escrito desta forma.

b) Se n é um número inteiro e $4n$ é par, então n é par.
Repare que para qualquer n ímpar, $4n$ é par mas não faz n tornar-se par.

c) O produto de dois números irracionais é um número irracional.
Pegando qualquer raiz quadrada não-exata, como $\sqrt{2}$ por exemplo, temos que $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$ que sabemos que não é irracional.

Método de indução matematica

11 Considere $P(n)$ como a proposição de que $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para todo número inteiro positivo n.

a) Qual é a proposição $P(1)$? $P(1): 1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$

b) Mostre que $P(1)$ é verdadeira, completando completando o passo base da demonstração. $P(1)$ é verdeira pois: $1 = \frac{1(2)(3)}{6}$

c) Qual é a hipótese indutiva?

Para $n = k$, temos $P(k): 1^2+2^2+\ldots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

d) O que você precisa para demonstrar o passo de indução?

Para $n = k+1$, então $P(k+1): 1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6}$

e) Complete o passo de indução.

Pela hipótese de indução temos

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{6(k+1)^2}{6}\\
&= \frac{(k+1)(2k^2+k)+(6k+6)(k+1)}{6}\\
&= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6}
\end{aligned}$$

12 Considere $P(n)$ como a proposição de que $1^3+2^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ para todo número inteiro positivo n.

a) Qual é a proposição $P(1)$? $P(1): 1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$

b) Mostre que $P(1)$ é verdadeira, completando completando o passo base da demonstração. $P(1)$ é verdeira pois: $1 = \left(\frac{1(2)}{2}\right)^2$

c) Qual é a hipótese indutiva?

Para $n = k$, temos $P(k): 1^3+2^3+\ldots+k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$

d) O que você precisa para demonstrar o passo de indução?

Para $n = k+1$, então $P(k+1): 1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$

e) Complete o passo de indução.

Pela hipótese de indução temos

$$\begin{aligned}
1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3\\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{2^2}+(k+1)(k+1)^2\\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4}+\frac{(4k+4)(k+1)^2}{4}\\
&= \frac{(k^2+4k+4)(k+1)^2}{4}\\
&= \frac{(k+2)^2(k+1)^2}{4}\\
&= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

13 Demonstre que $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ sempre que n for um número inteiro não negativo.

Para $n = 1$ temos $1^2 = \frac{1(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)}{3}$ que é verdade.

Suponha que isso seja verdade para $n = k$, então para $n = k+1$ temos

$$\begin{aligned}
1^2+3^2+\ldots+(2k-1)^2&\\
+(2k+1)^2 &= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}+(2k+1)^2\\
&= \frac{(2k^2-k)(2k+1)}{3}+\frac{3(2k+1)(2k+1)}{3}\\
&= \frac{(2k^2-k+6k+3)(2k+1)}{3}\\
&= \frac{(2k^2+5k+3)(2k+1)}{3}\\
&= \frac{(k+1)(2k+3)(2k+1)}{3}\\
&= \frac{(k+1)(2(k+1)+1)(2(k+1)-1)}{3}
\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

14 Demonstre que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 0$ temos $2^0 = 2^{0+1}-1$ que é verdade.

Suponha que isso seja verdade para $n = k$, então para $n = k+1$ temos

$$\begin{aligned}
2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n+2^{n+1} &= 2^{n+1}-1+2^{n+1}\\
&= 2\cdot 2^{n+1}-1\\
&= 2^{n+1+1}-1\\
&= 2^{n+2}-1
\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

15 Mostre que 2 divide $n^2 + n$ sempre que n for um número inteiro positivo.

Para $n = 1$ temos $1^1 + 1 = 2$ é divisível por 2.

Suponha que isso seja verdade para $n = k$, ou seja, que existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $k^2 + k = 2p$. Então, para $n = k + 1$ temos

$$\begin{aligned}(k+1)^2 + k + 1 &= k^2 + 2k + 1 + k + 1\\ &= k^2 + k + 2k + 2\\ &= 2p + 2k + 2\\ &= 2(p + k + 1) \qquad \text{(é divisível por 2)}\end{aligned}$$

Portanto, a propriedade é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

16 Mostre que 5 divide $n^5 - n$ sempre que n for um número inteiro positivo.

Para $n = 1$ temos $1^5 - 1 = 0$ é divisível por 5.

Suponha que isso seja verdade para $n = k$, ou seja, que existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $k^5 - k = 5p$. Então, para $n = k + 1$ temos

$$\begin{aligned}(k+1)^5 - (k+1) &= \underbrace{k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1}_{\text{expansão do Binômio de Newton}} - k - 1\\ &= k^5 - k + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k\\ &= 5p + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k\\ &= 5(p + k^2 + 2k^3 + 2k^2 + k)\\ &\qquad \text{(é divisível por 5)}\end{aligned}$$

Portanto, a propriedade é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

17 Demonstre que $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ sempre que n for um número inteiro não negativo.

Para $n = 1$ temos $\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{2\cdot 1 + 1}$ que é verdade.

Suponha que isso seja verdade para $n = k$. Então, para $n = k+1$ temos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots\\ &+ \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\ &= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}\\ &= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}\\ &= \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}\\ &= \frac{k+1}{2k+3}\\ &= \frac{k+1}{2(k+1)+1}\end{aligned}$$

Portanto, a propriedade é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

18 Mostre que $2^n > n^2$ se n for um número inteiro maior que 4.

Para $n = 5$ temos $2^5 = 32, 5^2 = 25$. Como $32 > 25$, o resultado é verdadeiro para $n = 5$.

Suponha que, para $k \geq 5$, isso seja verdade para $n = k$, ou seja, que $2^k > k^2$. Então, para $n = k + 1$ temos

$$\begin{aligned}2^{k+1} = 2\cdot 2^k > 2k^2 &= k^2 + k^2\\ &\geq \underbrace{k^2 + 5k}_{\text{pois } k \geq 5} = k^2 + 4k + k\\ &> k^2 + 2k + 1\\ &= (k+1)^2\end{aligned}$$

Portanto, a propriedade é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

19 Suponha que $C = \begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$ é uma matriz em que a e b são números reais. Mostre que $C^n = \begin{pmatrix} a^n & 0\\ 0 & b^n\end{pmatrix}$ para todo número inteiro positivo n.

Para $n = 1$, temos $C^1 = \begin{pmatrix} a^1 & 0\\ 0 & b^1\end{pmatrix}$ que é verdadeiro.

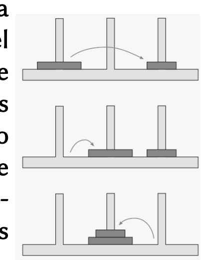
Suponha que isso seja verdade para $n = k$, ou seja, que $C^k = \begin{pmatrix} a^k & 0\\ 0 & b^k\end{pmatrix}$. Então, para $n = k + 1$ temos

$$\begin{aligned}C^{k+1} = C^k \cdot C &= \begin{pmatrix} a^k & 0\\ 0 & b^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} a^k\cdot a + 0\cdot 0 & a^k\cdot 0 + 0\cdot b\\ 0\cdot a + b^k\cdot 0 & b^k\cdot b + 0\cdot 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} a^{k+1} & 0\\ 0 & b^{k+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Portanto, a propriedade é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

20 A *Torre de Hanói* é um jogo que consiste em um tabuleiro com três espigões e uma coleção de n discos de tamanhos (raios) diferentes. Os discos têm orifícios perfurados em seus centros, de modo a poderem adaptar-se aos espigões no tabuleiro. Inicialmente, todos os discos estão no primeiro espigão, dispostos por tamanho (do maior, na base, para o menor, no topo).

O objetivo é transferir todos os discos para outro espigão com o menor número possível de movimentos. Cada movimento consiste em tirar o disco de cima de um dos espigões e colocá-lo em outro espigão, com a condição de não se colocar um disco maior em cima de um disco menor. A figura mostra como resolver o problema da Torre de Hanói em três movimentos quando $n = 2$.



Prove: Para todo inteiro positivo n, o jogo da Torre de Hanói (com n discos) pode ser resolvido com $2^n - 1$ movimentos.

Para $n = 1$ temos um único disco que pode ser resolvido com $2^1 - 1 = 1$ movimento.

Suponha que isso seja verdade para $n = k$, ou seja, que para k discos podemos resolver com $2^k - 1$ movimentos. Então, para $n = k + 1$ podemos começar o jogo movendo os k primeiros discos para um dos espigões com $2^k - 1$ movimentos por nossa hipótese de indução. Após isso, podemos mover o disco $k + 1$ para o espigão vazio com 1 movimento como vimos pela base de indução. Feito isso, podemos agora trazer os k discos para cima do disco $k+1$ com outros $2^k - 1$ movimentos, totalizando assim $2^k - 1 + 1 + 2k - 1 = 2\cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$ movimentos, o que completa o passo de indução como desejado.