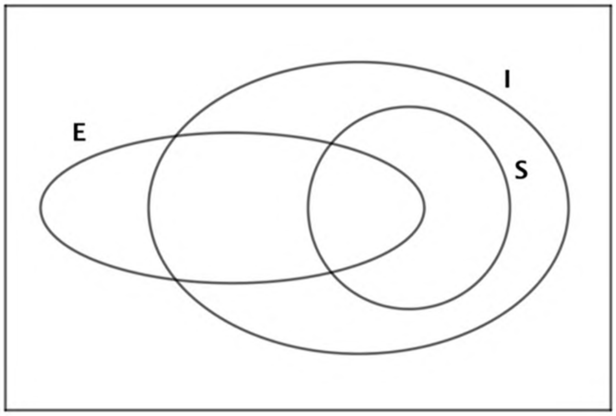
Fundamentos de Matemática para Computação (2024.2)

Questionário — Teoria de Conjuntos e Funções

1 O diagrama representa algumas informações sobre a escolaridade dos moradores de um município.



onde

I = conjunto de todos os moradores que concluíram um curso de inglês.

E = conjunto de todos os moradores que concluíram um curso de espanhol.

S = conjunto de todos os moradores que concluíram o Ensino Superior.

Em todas as seis regiões do diagrama, há pelo menos um morador representado. Assim, é correto afirmar que se um morador dessa cidade

a) concluiu um curso de inglês, então ele necessariamente concluiu um curso de espanhol.

b) concluiu um curso de inglês e um de espanhol, então ele necessariamente concluiu o Ensino Superior.

c) não concluiu um curso de espanhol, então ele necessariamente não concluiu o Ensino Superior.

d) não concluiu um curso de inglês, então ele necessariamente não concluiu um curso de espanhol.

e) não concluiu um curso de inglês, então ele necessariamente não concluiu o Ensino Superior.

⊛ Lembre-se das propriedades de conjuntos, em especial a propriedade do complementar de subconjuntos: se $A \subseteq B$, então $B^c \subseteq A^c$.

Pelo diagrama podemos ver que todos que estão em S estão em I, pela definição de subconjunto. Agora, pela propriedade do complementar, quem NÃO está em I também NÃO está em S como estabelecido.

2 Considere as funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^2$, definidas para todo número real x. O número de soluções da equação $f(g(x)) = g(f(x))$ é igual a

a) 1 b) 2 c) 0 d) 4 e) 3

⊛ Lembre-se da definição de composição de funções: aplica-se a função 'de dentro' e o resultado vai na função 'de fora':

$$\begin{aligned} & f(g(x)) = g(f(x)) \\ \Rightarrow\ & f(x^2) = g(2x) \\ \Rightarrow\ & 2x^2 = (2x)^2 \\ \Rightarrow\ & 0 = 4x^2 - 2x^2 \\ \Rightarrow\ & 2x^2 = 0 \\ \Rightarrow\ & x = 0 \end{aligned}$$

Como há apenas um valor que satisfaz a equação dada, então a resposta é 1.

3 Analisando a carteira de vacinação de 80 crianças verificou-se que 52 receberam a vacina A, 68 receberam a vacina B e 3 não receberam a vacina A nem a B. Dessas 80 crianças, receberam ambas as vacinas (A e B) apenas

a) 37 **b) 43** c) 16 d) 53 e) 64

⊛ Lembre-se da definição de complementar de um conjunto e que, para usar o princípio de inclusão e exclusão, precisamos dos valores EXATOS para obter os resultados corretos. Se nosso conjunto universo tem 80 crianças e 3 delas não tomaram NENHUMA vacina, então essas 3 não estão em $A \cup B$. Assim, temos $|A \cup B| = 80 - 3 = 77$. Deste modo,

$$\begin{aligned} & |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \\ \Rightarrow\ & 77 = 52 + 68 - |A \cap B| \\ \Rightarrow\ & |A \cap B| = 130 - 77 = 43 \end{aligned}$$

4 Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 - 1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

O valor de $f(\pi) + f(\sqrt{2}) - f(1)$ é

a) $\pi^2 - 2$
b) $2\sqrt{2} - \pi + 1$
c) $\pi^2 + 2\sqrt{\pi} - 2$
d) $2\pi + 1$
e) $2\pi + 2\sqrt{2} - 2$

⊛ Lembre-se de quem são os elementos de $\mathbb{Q}$ e os elementos de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Assim, $f(\pi) = \pi^2 - 1$, $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 1 = 2 - 1 = 1$ e $f(1) = 2$. Ou seja, $f(\pi) + f(\sqrt{2}) - f(1) = \pi^2 - 1 + 1 - 2 = \pi^2 - 2$.

5 Usando a equivalência lógica $(p \to q) \iff (\neg p \vee q)$ entre outras leis de equivalência, mostre que $(\neg p) \to (p \to q)$ é uma tautologia sem usar tabelas-verdade.

⊛ Lembre-se das regras de equivalência e como usá-las:

$$\begin{aligned} (\neg p) \to (p \to q) &\equiv \neg(\neg p) \vee (p \to q) && \text{(implicação)} \\ &\equiv p \vee (\neg p \vee q) && \text{(dupla negação e implicação)} \\ &\equiv (p \vee \neg p) \vee q && \text{(associativadade)} \\ &\equiv V \vee q && \text{(tautologia)} \\ &\equiv V && \text{(disjunção tautológica)} \end{aligned}$$

6 Escreva a recíproca e a contrapositiva de cada uma das seguintes implicações:

⊛ Lembre-se que se $p \to q$ é uma implicação, então $q \to p$ é a sua recíproca e $\neg q \to \neg p$ é a sua contrapositiva.

⊛ Traduções tem mais de uma versão correta, o que importa é que o significado seja o mesmo.

i) Todo grafo Euleriano é conexo.

Recíproca: Todo grafo conexo é Euleriano.

Contrapositiva: Se algum grafo não é conexo, então ele não é Euleriano.

ii) $ab = 0 \to a = 0$ ou $b = 0$.

Recíproca: $a = 0$ ou $b = 0 \to ab = 0$.

Contrapositiva: $a \neq 0$ e $b \neq 0 \to ab \neq 0$.

iii) Se $\triangle BAC$ é um triângulo retângulo, então $a^2 = b^2 + c^2$.

Recíproca: Se $a^2 = b^2 + c^2$, então $\triangle BAC$ é um triângulo retângulo.

Contrapositiva: Se $a^2 \neq b^2 + c^2$, então $\triangle BAC$ não é um triângulo retângulo.