Exercícios — Relações

Obs.: Para o seu devido aprendizado, lembre-se de verificar e entender o porquê das respostas abaixo como feito em sala!

1 Liste os pares ordenados na relação $\mathcal{R}$ de $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ em $B = \{0, 1, 2, 3\}$ em que $(a, b) \in \mathcal{R}$ se, e somente se:

a) $a = b$ $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

b) $a + b = 4$ $\{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$

c) $a > b$ $\{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$

d) $mdc(a, b) = 1$ $\{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (1, 3), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 3)\}$

e) $mmc(a, b) = 2$ $\{(2, 2), (4, 2)\}$

2 Para cada uma destas relações no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, decida se ela é reflexiva, se é simétrica, se é anti-simétrica e se é transitiva.

a) $\{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$ transitiva

b) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ reflexiva, simétrica e transitiva

c) $\{(2, 4), (4, 2)\}$ simétrica

d) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ anti-simétrica

e) $\{(1, 1), (2, 3), (3, 4)\}$ nenhum tipo

f) $\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$ nenhum tipo

3 Determine se a relação $\mathcal{R}$ no conjunto de todas as pessoas é reflexiva, simétrica, anti-simétrica e/ou transitiva, em que $(a, b) \in \mathcal{R}$ se, e somente se:

a) a é mais alto que b. anti-simétrica e transitiva

b) a e b nasceram no mesmo dia. reflexiva, simétrica e transitiva

c) a e b tem um avô ou avó em comum. reflexiva e simétrica

4 Determine se a relação $\mathcal{R}$ no conjunto de todas as páginas da Web é reflexiva, simétrica, anti-simétrica e/ou transitiva, em que $(a, b) \in \mathcal{R}$ se, e somente se:

a) todo mundo que visitou a página a também visitou a página b. reflexiva

b) não há links comuns encontrados tanto na página a quanto na página b. reflexiva e simétrica

c) existe pelo menos um link comum nas páginas a e b. reflexiva e simétrica (repare que não há como afirmar que essa relação é transitiva pois não há como garantir que se há pelo menos um link entre a e b e pelo menos um link entre b e c, não sabemos se seria o MESMO link para relacionar a e c)

d) existe uma página da Web que inclui links para ambas as páginas a e b. reflexiva e simétrica (repare que não há como afirmar que essa relação é transitiva pois não há como garantir que se existe pelo menos uma página com link para a e b e pelo menos uma página com link para b e c, não sabemos se seria a MESMA página para relacionar a e c. Pode ser que existam outras páginas com link para a e c mas não temos como afirmar isso apenas tendo b como elemento de transição)

5 Seja A o conjunto de livros a venda numa livraria e assuma que entre eles há livros com as seguintes propriedades:

Livro	Preço	Tamanho
U	R$ 10	100 páginas
W	R$ 25	125 páginas
X	R$ 20	150 páginas
Y	R$ 10	200 páginas
Z	R$ 5	100 páginas

a) Suponha que $(a, b) \in \mathcal{R}$ se, e somente se, o preço do livro a é maior ou igual ao preço do livro b **e** o tamanho de a é maior ou igual ao tamanho de b. Essa relação é reflexiva? Simétrica? Anti-simétrica? Transitiva?

É reflexiva: qualquer livro tem preço $\geq$ que seu próprio preço e tamanho $\geq$ que seu próprio tamanho, ou seja, $(a, a) \in \mathcal{R}$ para qualquer livro a.

Não é simétrica: por exemplo $(Y, Z) \in \mathcal{R}$ pelos critérios de preço e tamanho mas pelos mesmos critérios, $(Z, Y) \notin \mathcal{R}$.

É anti-simétrica: note que se (a, b) e (b, a) estão ambos em $\mathcal{R}$, então a e b tem o mesmo preço e tamanho, o que só é possível se $a = b$.

É transitiva: note que se (a, b) e (b, c) estão em $\mathcal{R}$, então o preço de $a \geq$ preço de b e o preço de $b \geq$ preço de c, ou seja, o preço de $a \geq$ preço de c. Da mesma forma, o tamanho de $a \geq$ tamanho de b e o tamanho de $b \geq$ tamanho de c, ou seja, o tamanho de $a \geq$ tamanho de c. Portanto, $(a, c) \in \mathcal{R}$.

b) Suponha que $(a, b) \in \mathcal{R}$ se, e somente se, o preço do livro a é maior ou igual ao preço do livro b **ou** o tamanho de a é maior ou igual ao tamanho de b. Essa relação é reflexiva? Simétrica? Anti-simétrica? Transitiva?

É reflexiva: qualquer livro tem preço $\geq$ que seu próprio preço ou tamanho $\geq$ que seu próprio tamanho, ou seja, $(a, a) \in \mathcal{R}$ para qualquer livro a.

Não é simétrica: por exemplo $(Y, Z) \in \mathcal{R}$ pelos critérios de preço e tamanho e mesmo olhando os critérios individualmente, $(Z, Y) \notin \mathcal{R}$.

Não é anti-simétrica: por exemplo $(X, Y) \in \mathcal{R}$ pelo critério de preço mas $(Y, X) \in \mathcal{R}$ pelo critério do tamanho.

É transitiva: note que se (a, b) e (b, c) estão em $\mathcal{R}$, então o preço de $a \geq$ preço de b e o preço de $b \geq$ preço de c, ou seja, o preço de $a \geq$ preço de c. Da mesma forma, o tamanho de $a \geq$ tamanho de b e o tamanho de $b \geq$ tamanho de c, ou seja, o tamanho de $a \geq$ tamanho de c. Como basta valer um critério, $(a, c) \in \mathcal{R}$.

(Obs.: Esse exercício poderia ser feito listando todos os pares de livros que ser relacionam e analisar caso a caso mas e se, ao invés de 5 livros, tivéssimos 50 na tabela? Listar os pares seria exaustivo mas os argumentos acima ainda seriam válidos)

6 Seja $\mathcal{R} = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,1)\}$ e seja $\mathcal{S} = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,2)\}$. Determine $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

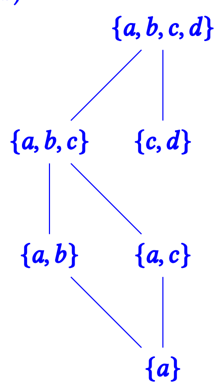
7 Faça o diagrama de Hasse para cada relação de ordem abaixo:

a) $(\{1,2,3,4,5,6\}, \leq)$

b) $(\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,c,d\},\{a,c\},\{c,d\}\}, \subseteq)$

a)

b)



8 Liste os elementos do conjunto $\{11, 1010, 100, 1, 101, 111, 110, 1001, 10, 1000\}$ em ordem lexicográfica.

$\{1, 10, 100, 1000, 1001, 101, 1010, 11, 110, 111\}$

(na dúvida, releia a definição dessa ordem e como ela se baseia na sequência de exibição dos caracteres ao invés do valor total deles em si)

9 Considere a seguinte relação $\mathcal{R}$ no conjunto $\mathbb{N}$ onde $(a,b) \in \mathcal{R}$ se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $ak = b$.

a) Mostre que esta é uma relação de ordem.

<u>É reflexiva</u>: $(a,a) \in \mathcal{R}$ pois existe $k = 1$ onde $a \cdot 1 = a, \forall a \in \mathbb{N}$.

<u>É anti-simétrica</u>: se $(a,b) \in \mathcal{R}$ e $a \neq b$, então existe $k \neq 1$ onde $ak = b \Rightarrow a = \frac{b}{k}$. Agora, se $(b,a) \in \mathcal{R}$, então existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $bq = a \Rightarrow q = \frac{a}{b} = \frac{\frac{b}{k}}{b} = \frac{1}{k}$ (absurdo!), pois não é possível tal número ser natural. Deste modo, podemos afirmar que $(b,a) \notin \mathcal{R}$.

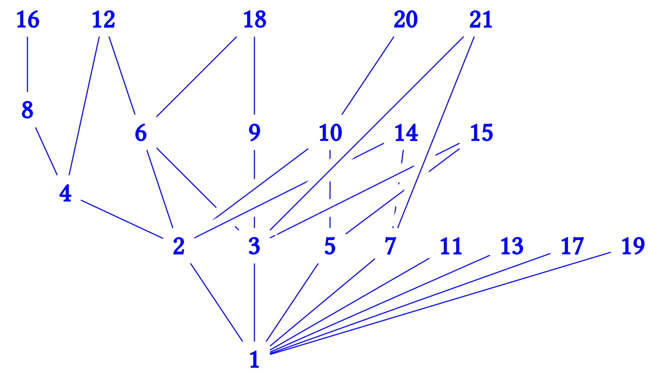
<u>É transitiva</u>: se $(a,b) \in \mathcal{R}$, então existe $k \in \mathbb{N}$ onde $ak = b$ e se $(b,c) \in \mathcal{R}$, então existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $bq = c \Rightarrow akq = c$. Como o produto dos números naturais k e q é natural, podemos afirmar que $(a,c) \in \mathcal{R}$.

Portanto, temos uma relação de ordem.

b) Esta é uma relação de ordem total?

Não é total pois há números naturais que não podem ser comparados por essa ordem. Por exemplo, tome qualquer par de números primos distintos e verifique que não vai existir $k \in \mathbb{N}$ que faça esse par estar na relação.

c) Descreva o diagrama de Hasse para o subconjunto $B = \{1, 2, \ldots, 21\}$.



d) Determine, se existir, quem são os elementos mínimo e máximo de B.

Mínimo: 1

Máximo: não há

10 Explique porque cada uma das relações definidas em $A = \{1,2,3\}$ abaixo **não é** uma relação de equivalência.

a) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,2),(3,2),(3,3),(2,3),(2,1)\}$

não é reflexiva: faltou $(2,2)$

b) $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,1),(1,2),(2,3),(3,1),(1,3)\}$

não é simétrica: faltou $(3,2)$

11 Seja $\mathcal{R}$ a relação no conjunto de todas as URLs (ou endereços na Web) tal que $x \mathcal{R} y$ se, e somente se, a página na Web em x é a mesma página na Web em y. Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

Lembre-se de verificar as propriedades como feito em sala!

12 Se a e b são inteiros, defina $a \sim b$ se existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $2a + 3b = 5n$.

a) Mostre que $\sim$ define uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.

<u>É reflexiva</u>: Para qualquer $a \in \mathbb{Z}$, $a \sim a$ pois $2a + 3a = 5a$.

<u>É simétrica</u>: Se $a \sim b$, então $2a + 3b = 5n$ para algum n. Assim, $2b + 3a = (5a + 5b) - (2a + 3b) = 5(a + b) - 5n = 5(a + b - n)$. Como $a + b - n$ é inteiro, então $b \sim a$.

<u>É transitiva</u>: Se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $2a+3b = 5n$ e $2b+3c = 5m$ para inteiros n e m. Assim, $(2a + 3b) + (2b + 3c) = 5(n + m)$ e $2a+3c = 5(n+m)-5b = 5(n+m-b)$. Como $n+m-b$ é inteiro, então $a \sim c$.

b) Determine o conjunto das classe de equivalência.

$$[0]_\sim = \{\ldots, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$$
$$[1]_\sim = \{\ldots, -4, 1, 6, 11, 16, \ldots\}$$
$$[2]_\sim = \{\ldots, -3, 2, 7, 12, 17, \ldots\}$$
$$[3]_\sim = \{\ldots, -2, 3, 8, 13, 18, \ldots\}$$
$$[4]_\sim = \{\ldots, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots\}$$

(Lembre-se que para definir essas classes, escolhemos um 'representante' de cada classe e, a partir dele, calculamos os demais elementos que estão numa classe específica.)

13 Seja n um inteiro positivo e S um conjunto de sequências. Suponha que $\mathcal{R}_n$ seja a relação em S tal que $a\,\mathcal{R}_n\,b$ se, e somente se $a = b$ ou tanto a quanto b têm, pelo menos, n caracteres e os primeiros n caracteres de a e b são os mesmos. Isto é, uma sequência de menos de n caracteres está relacionada apenas a ela mesma; uma sequência a com, pelo menos, n caracteres está relacionada a uma sequência b se, e somente se, b tiver, pelo menos, n caracteres e b começar com os n caracteres no início de a. Por exemplo, seja $n = 3$ e seja S o conjunto de todas as sequências de bits. Então $a\,\mathcal{R}_3\,b$ ou quando $a = b$ ou quando a e b forem sequências de bits de comprimento maior que ou igual a três que começam com os mesmos primeiros 3 bits. Por exemplo, $01\,\mathcal{R}_3\,01$ e $00111\,\mathcal{R}_3\,00101$, mas $01\not\mathcal{R}_3 010$ e $01011\not\mathcal{R}_3 01110$.

a) Mostre que para todo conjunto S de sequências e todo inteiro positivo n, $\mathcal{R}_n$ é uma relação de equivalência em S.

A relação $\mathcal{R}_n$ é reflexiva porque $a = a$, de modo que $a\,\mathcal{R}_n\,a$ sempre que a é uma sequência em S. Se $a\,\mathcal{R}_n\,b$, então ou $a = b$ ou ambos a e b têm, pelo menos, n caracteres. Isso significa que $b\,\mathcal{R}_n\,a$, ou seja, que $\mathcal{R}_n$ é simétrica.

Suponha agora que $a\,\mathcal{R}_n\,b$ e $b\,\mathcal{R}_n\,c$. Então, $a = b$ ou a e b têm, pelo menos, n caracteres de comprimento e a e b começam com os mesmos n caracteres, e ou $b = c$ ou b e c têm, pelo menos, n caracteres de comprimento e b e c começam com os mesmos n caracteres. A partir disso, podemos deduzir que ou $a = c$ ou a e c têm, pelo menos, n caracteres de comprimento e a e c começam com os mesmos n caracteres (porque, nesse caso, sabemos que a, b e c têm, pelo menos, n caracteres de comprimento e ambos, a e c, começam com os mesmos n caracteres que b começa). Consequentemente, $\mathcal{R}_n$ é transitiva e, portanto, é uma relação de equivalência.

b) Qual é a classe de equivalência da sequência 0111 relativa a $\mathcal{R}_3$ no conjunto de todas as sequências de bits?

As sequências equivalentes a 0111 são as sequências de bits com, pelo menos, três bits que começam com 011. Estas são as sequências de bits 011, 0110, 0111, 01100, 01101, 01110, 01111, e assim por diante. Consequentemente,

$$[011]_{\mathcal{R}_3} = \{011, 0110, 0111, 01100, 01101, 01110, 01111, \ldots\}$$