Exercícios — Funções, Sequências e Recorrências

1 Encontre o domínio e o conjunto imagem das funções abaixo:

a) a função que determina, para número inteiro positivo, quantos dos dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 não aparecem como dígito decimal do número inteiro. Domínio, $\mathbb{Z}^+$; Imagem, $\{9, 10\}$

b) a função que determina, para uma cadeia de bits, o número de vezes que o bloco 11 aparece.
Domínio, o conjunto das cadeias de bits ; Imagem, $\mathbb{N}$.

c) a função que determina, para uma cadeia de bits, a posição do primeiro 1 na cadeia e que determina o valor 0 para uma cadeia de bits formada apenas por 0.
Domínio, o conjunto das cadeias de bits ; Imagem, $\mathbb{N}$.

2 Encontre os valores abaixo para as funções piso e teto:

a) $\lceil 1,1 \rceil = 2$

b) $\left\lceil -\frac{3}{4} \right\rceil = 0$

c) $\left\lfloor \frac{7}{8} \right\rfloor = 0$

d) $\lfloor -2,99 \rfloor = -3$

e) $\lceil 3 \rceil = 3$

f) $\left\lfloor \frac{1}{2} + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} + 2 \right\rfloor = 2$

g) $\left\lfloor \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot 2 \right\rfloor = 1$

h) $\left\lceil \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lceil 1 + \frac{1}{2} \right\rceil = 2$

3 Dados são transmitidos através de uma determinada rede Ethernet em blocos de 1500 octetos (blocos de 8 bits). Quantos blocos são necessários para transmitir as quantidades de dados abaixo através dessa rede de transmissão? (*Note que um byte é um sinônimo para octeto, um kilobyte são 1000 bytes e um megabyte são 1 000 000 bytes pelo Sistema Internacional.*)

a) 384 kilobytes de dados
$\left\lceil \frac{384000}{1500} \right\rceil = 256$ octetos

b) 45,3 megabytes de dados
$\left\lceil \frac{45300000}{1500} \right\rceil = 30200$ octetos

4 Quais são os termos x_0, x_1, x_2, x_3 da sequência em que x_n é igual a:

a) $2^n + 1$ — 2, 3, 5, 9

b) $(n+1)^{n+1}$ — 1, 4, 27, 256

c) $\lfloor n/2 \rfloor$ — 0, 0, 1, 1

d) $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil$ — 1, 1, 2, 3

5 Quais são os valores das somas abaixo, em que $D = \{1, 3, 5, 7\}$?

a) $\sum_{k=1}^{5} (k+1) = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$

b) $\sum_{j=0}^{4} (-2)^j = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 = 11$

c) $\sum_{j=0}^{8} (2^{j+1} - 2^j) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 = 511$

d) $\sum_{j \in D} j = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$

e) $\sum_{j \in D} j^2 = 1 + 9 + 25 + 49 = 84$

f) $\sum_{j \in D} \frac{1}{j} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{176}{105}$

6 Quais são os valores dos produtos abaixo?

a) $\prod_{i=0}^{10} i = 0$

b) $\prod_{i=5}^{8} i = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680$

c) $\prod_{i=1}^{100} (-1)^i = 1$ (aqui lembre-se dos sinais de acordo com os índices pares e ímpares)

7 Escreva o pseudocódigo para uma função que retorne o valor de $n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

```
funcao  f(n)
   início
      se n = 0 entao
        retorne 1
      senao
        retorne n * f(n - 1)
   fimse
fimfuncao
```

8 Escreva o pseudocódigo para uma função que retorne o valor do termo x_n para todo $n \in \mathbb{N}$ na sequência de Fibonacci.

```
funcao  x(n)
   início
      se n = 0 ou n = 1 entao
    retorne 1
      senao
    retorne  x(n-1) +  x(n-2)
   fimse
fimfuncao
```

9 Considere a função recursiva 'func' definida por

```
func(1)  = 1
func(n)  = (n - 1) * func(n - 1)
```

Quais são os valores de func(4) e func(5), respectivamente?

```
func(1)  = 1
func(2)  = (2 - 1) * func(2 - 1) = 1
func(3)  = (3 - 1) * func(3 - 1) = 3
func(4)  = (4 - 1) * func(4 - 1) = 9
func(5)  = (5 - 1) * func(5 - 1) = 36
```

10 Considere a seguinte função recursiva:

```
funcao recursiva(x : inteiro): inteiro
 início
   se x = 1 entao
     retorne -x
   senao
     retorne -5 * recursiva(x - 1) + x
 fimse
fimfuncao
```

Qual é o valor retornado pela função se ela for chamada com x = 4?

```
recursiva(1)  =  -1
recursiva(2)  =  -5 * recursiva(2 - 1) + 2 = 7
recursiva(3)  =  -5 * recursiva(3 - 1) + 3 = -32
recursiva(4)  =  -5 * recursiva(4 - 1) + 4 = 164
```

11 Seja a função recursiva f definida como

```
f(a,b)
  se b = 0 entao
    retorna a
  senao
    retorna f(b, a MOD b)
```

onde x MOD y é o resto da divisão de x por y. Qual é o valor de f(30, 21)?

f(30, 21) $\hookrightarrow$ f(21, 9) $\hookrightarrow$ f(9, 3) $\hookrightarrow$ f(3,0) $\hookrightarrow$ 3

12 Considere a relação de recorrência a seguir:

$$H(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ H(n-1) + H(n-2) - H(n-3) & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

a) Calcule $H(n)$ para $n = 1, 2, \ldots, 10$.
$H(1) = 1; H(2) = 1; H(3) = 1 + 1 - 0 = 2; H(4) = 2 + 1 - 1 = 2; H(5) = 2 + 2 - 1 = 3; H(6) = 3 + 2 - 2 = 3; H(7) = 3 + 3 - 2 = 4; H(8) = 4+3-3 = 4; H(9) = 4+4-3 = 5; H(10) = 5+4-4 = 5$

b) Usando o padrão da parte (a), adivinhe quanto vale $H(100)$.
Pelos valores encontrados, temos que $H(n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, ou seja, $H(100) = \left\lceil \frac{100}{2} \right\rceil = 50$. (Conseguiria verificar isso por indução?)

13 Os *números de Lucas* $L(n)$ têm quase a mesma definição que os números de Fibonacci:

$$L(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 3 & \text{se } n = 2 \\ L(n-1) + L(n-2) & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

a) Em que a definição de $L(n)$ difere da definição dos números de Fibonacci?
Apenas no valor do segundo termo inicial.

b) Calcule os 12 primeiros números de Lucas.
$L(1) = 1; L(2) = 3; L(3) = 3 + 1 = 4; L(4) = 4 + 3 = 7; L(5) = 7 + 4 = 11; L(6) = 11 + 7 = 18; L(7) = 18 + 11 = 29; L(8) = 29+18 = 47; L(9) = 47+29 = 76; L(10) = 76+47 = 123; L(11) = 123 + 76 = 199; L(12) = 199 + 123 = 322.$