Exercícios — Contagem e Grafos

1 As placas de identificação na China começam com um caractere chinês designando a província, seguido por uma letra do conjunto $\{A, \ldots, Z\}$, seguida por uma cadeia composta por cinco caracteres alfanuméricos (usando símbolos do conjunto $\{A, \ldots, Z, 0, 1, \ldots, 9\}$). Qual o número máximo de placas desse tipo que podem existir em uma dada província chinesa?

Temos 26 opções para a primeira letra e 36^5 opções para as demais, obtendo assim $26 \cdot 36^5 = 1572120576$ placas possíveis.

2 A fita codificadora de proteínas de um gene humano médio consiste em 1350 nucleotídeos. Supondo que cada nucleotídeo pode assumir qualquer um dos quatro valores (A, T, C, ou G), quantos genes diferentes com exatos 1350 nucleotídeos são possíveis?

Temos 4 opções para cada um dos 1350 nucleotídeos, o que fornece 4^{1350} genes possíveis.

3 Existem 16 times de futebol na Primeira Divisão da Tailândia, e existem 22 times na Primeira Divisão da Inglaterra.

a) Quantas maneiras diferentes existem de combinar em pares um time da Tailândia com um time da Inglaterra? $16 \cdot 22 = 352$

b) (b) Quantas maneiras diferentes existem de combinar em pares dois times da Tailândia? (Cuidado: Combinar Bangkok Bank FC com Chonburi FC é o mesmo que combinar Chonburi FC com Bangkok Bank FC.) $C_{16,2} = \dfrac{16!}{14!\,2!} = \dfrac{16 \cdot 15}{2} = 8 \cdot 15 = 120$

4 Existem quantas cadeias binárias de quatro dígitos que não contêm 000 ou 111?

Do total de 16 cadeias de 4 bits, temos 4 com 000 e 4 com 111, o que nos diz que 8 cadeias de 4 bits não contêm 000 ou 111.

5 Rute tem o seguinte conjunto de ímãs de geladeira: $\{A,B,C,D,E,F,G\}$.

a) Quantas cadeias diferentes, compostas por três letras, ela pode formar com esses ímãs? $A_{7,3} = \dfrac{7!}{(7-3)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

b) Quantas cadeias diferentes, compostas por três letras, ela pode formar se a letra do meio deve ser uma vogal? Como temos 2 vogais para ocupar a letra do meio, 6 opções para a primeira letra e 5 para a última, o total de anagramas nesse caso será $2 \cdot 6 \cdot 5 = 60$.

6 Hugo e Viviana trabalham em um escritório com mais oito colegas de trabalho. Desses 10 empregados, o chefe deles precisa escolher um grupo de quatro pessoas que irão trabalhar juntas em um projeto.

a) Quantos grupos de trabalho diferentes o chefe pode escolher? $C_{10,4} = \dfrac{10!}{6!\,4!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$

b) Suponha que Hugo e Viviana se recusam a trabalhar juntos, sob qualquer circunstância. Sob essa restrição, quantos grupos de trabalho diferentes podem ser formados? Como eles se recusam a trabalhar juntos, teremos 3 tipos de grupos possíveis:

1º caso: (grupos com Hugo mas sem Viviana)

Como já definimos Hugo como membro, precisamos contar de quantos modos podem ser escolhidos os outros 3 membros excluindo Viviana dentre os 9 empregados restantes, o que será $C_{8,3} = \dfrac{8!}{5!\,3!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 = 56$ possibilidades.

2º caso: (grupos com Viviana mas sem Hugo)

Como já definimos Viviana como membro, precisamos contar de quantos modos podem ser escolhidos os outros 3 membros excluindo Hugo dentre os 9 empregados restantes, o que será também $C_{8,3} = 56$ possibilidades.

3º caso: (grupos sem Hugo e sem Viviana)

Agora, vamos excluir ambos Viviana e Hugo da contagem e precisamos contar de quantos modos podem ser escolhidos os 4 membros dentre os 8 empregados restantes, o que será $C_{8,4} = \dfrac{8!}{4!\,4!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 2 \cdot 7 \cdot 5 = 70$ possibilidades.

Desta forma, o total de grupos onde Hugo e Viviana não trabalham juntos tem 56+56+70 possibilidades.

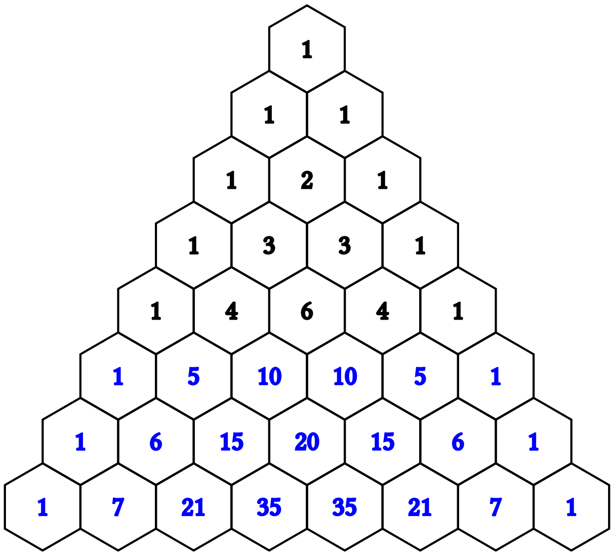
7 O Congresso de Porto Rico é formado por 27 senadores e 51 deputados.

a) Quantas maneiras existem de escolhermos um grupo de seis congressistas de Porto Rico? Como temos 78 congressistas, $C_{78,6} = \dfrac{78!}{72!\,6!} = \dfrac{78 \cdot 77 \cdot 76 \cdot 75 \cdot 74 \cdot 73}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 13 \cdot 77 \cdot 19 \cdot 5 \cdot 37 \cdot 73 = 256851595$ maneiras.

b) Quantas maneiras existem de escolhermos um grupo de seis congressistas, se três membros devem ser senadores e três devem ser deputados? Os três senadores podem ser escolhidos de $C_{27,3} = \dfrac{27!}{24!\,3!} = \dfrac{27 \cdot 26 \cdot 25}{3 \cdot 2} = 9 \cdot 13 \cdot 25 = 2925$ maneiras.
Enquanto os três deputados podem ser escolhidos de $C_{51,3} = \dfrac{51!}{48!\,3!} = \dfrac{51 \cdot 50 \cdot 49}{3 \cdot 2} = 17 \cdot 25 \cdot 49 = 20825$ maneiras.
Como para cada escolha de deputados há distintas escolhas de senadores, temos então um total de $2925 \cdot 20825 = 60913125$ maneiras de formar esse grupo de seis congressistas.

8 Um time masculino de *lacrosse* é formado por 10 jogadores: três atacantes, três meio-campistas, três zagueiros e um goleiro. Dado um conjunto de 10 jogadores, quantas maneiras existem de atribuirmos os papéis de atacante, meio-campo, zagueiro e goleiro? Para os atacantes, temos $C_{10,3} = \dfrac{10!}{7!\,3!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 5 \cdot 3 \cdot 8 = 120$ opções. Para os meio-campistas, temos $C_{7,3} = \dfrac{7!}{4!\,3!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 7 \cdot 5 = 35$ opções. Para os zagueiros, temos $C_{4,3} = \dfrac{4!}{1!\,3!} = 4$ opções. Para o goleiro temos $C_{1,1} =$ uma opção. Como cada opção influencia as demais, temos um total de $120 \cdot 35 \cdot 4 \cdot 1 = 16800$ maneiras de montar esse time.

9 O diagrama a seguir é chamado de *Triângulo de Pascal*, em homenagem ao filósofo/teólogo/matemático Blaise Pascal (1623-1662).



a) Identifique o padrão dos valores e preencha os espaços em branco.

b) Use o padrão para escrever uma função $R(n, j)$ de duas variáveis definida recursivamente que gere os demais valores.

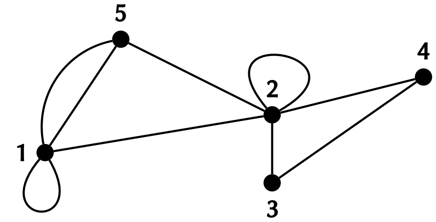
Assumindo n linhas e j a posição dentro da linha, temos $R(n, 1) = R(n, n) = 1$ (condição inicial)

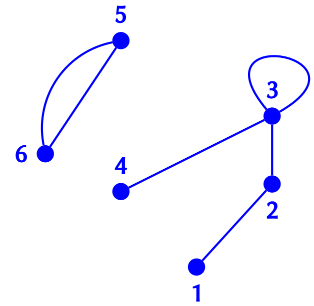
$R(n, j) = R(n-1, j-1) + R(n-1, j)$ (passo recursivo).

c) Qual a relação entre $R(n, j)$ e a combinação de n elementos tomados j a j? $R(n, j) = C_{n-1,j}$ (verifique!).

10 Desenhe o grafo representado pela matriz de adjacência abaixo e escreva a matriz de adjacência do grafo ao lado.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$





$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11 Desenhe o grafo não direcionado representado pela lista de adjacência a seguir.