Fundamentos de Matemática para Computação (2024.2)

Exercícios — Lógica e Cálculo de Predicados

Breve resumo...

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$	$p \oplus q$	$\neg p$	$\neg q$
V	V	V	V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V	F	V	V

1 Classifique cada uma das seguintes proposições como V ou F e explique suas respostas.

a) "$4 = 2 + 2$" $\wedge$ "$7 < \sqrt{50}$"

b) "$4 \neq 2 + 2$" $\wedge$ "$7 < \sqrt{50}$"

c) "$4 = 2 + 2$" $\to$ "$7 < \sqrt{50}$"

d) "$4 = 2 + 2$" $\leftrightarrow$ "$7 < \sqrt{50}$"

e) "$4 \neq 2 + 2$" $\to$ "$7 < \sqrt{50}$"

f) "$4 \neq 2 + 2$" $\leftrightarrow$ "$7 < \sqrt{50}$"

g) "$4 = 2 + 2$" $\to$ "$7 > \sqrt{50}$"

h) "$2 + 3 = 5$" $\to$ "$5 + 6 = 10$"

2 Escreva a negação das proposições abaixo na Língua Portuguesa:

a) $x = \pm 1$.

b) x é um número real e $x^2 + 1 = 0$.

c) Todo número inteiro é divisível por um número primo.

d) Para todo número real x, existe um número inteiro n tal que $n > x$.

e) Existem a, b e c tal que $(ab)c \neq a(bc)$.

f) Existe um grafo planar que não pode ser colorido com no máximo quatro cores.

g) Para todos os inteiros a e b, existem inteiros q e r tais que $b = qa + r$.

3 Escreva a recíproca e a contrapositiva de cada uma das seguintes implicações:

a) Se $\frac{a}{b}$ e $\frac{b}{c}$ são inteiros, então $\frac{a}{c}$ é um inteiro.

b) $x^2 = 1 \to x = \pm 1$.

c) Todo grafo Euleriano é conexo.

d) $ab = 0 \to a = 0$ ou $b = 0$.

e) Se $\triangle BAC$ é um triângulo retângulo, então $a^2 = b^2 + c^2$.

4 Reescreva as seguintes proposições usando os quantificadores "para todo" e "existe(m)" de forma apropriada:

a) Nem todas as funções contínuas são diferenciáveis.

b) Para x real, 2^x nunca é negativo.

c) Há uma infinidade de números primos.

d) Todo inteiro positivo é o produto de primos.

e) Todos os números reais positivos tem raiz quadrada real.

5 Construa a tabela-verdade de $p \to \neg(q \vee p)$.

6 Construa a tabela-verdade de $(p \vee q) \leftrightarrow [((\neg p) \wedge r) \to (q \wedge p)]$.

7 Encontre o valor de $[p \to ((q \wedge (\neg r)) \vee s)] \wedge [(\neg t) \leftrightarrow (s \wedge r)]$, onde p, q, r e s são verdadeiras enquanto t é falsa.

8 Um conectivo muito importante para projeto de circuitos lógicos é o operador não-e ou (nand), que denotaremos por $\overline{\wedge}$, definido por $p \mathbin{\overline{\wedge}} q = \neg(p \wedge q)$. De maneira análoga, temos o operador não-ou ou (nor), denotado por $\overline{\vee}$, e definido por $p \mathbin{\overline{\vee}} q = \neg(p \vee q)$. Construa as tabelas-verdade dos operadores $\overline{\wedge}$ e $\overline{\vee}$.

9 Mostre que $q \to (p \to q)$ é uma tautologia.

10 Mostre que $[p \wedge q] \wedge [(\neg p) \vee (\neg q)]$ é uma contradição.

11 Usando a equivalência lógica $(p \to q) \iff (\neg p \vee q)$ entre outras leis de equivalência, mostre que $(\neg p) \to (p \to q)$ é uma tautologia sem usar tabelas-verdade.

12 Determine se o seguinte argumento é válido ou não (em outras palavras, assumindo que as premissas são verdadeiras, verifique se conclusão se mantém).

a)

Se eu gosto de Computação, então eu vou estudar isso.

Eu estudo Computação ou falho no curso.

Se eu falho no curso, então eu não gosto de Computação.

b)

Se eu trabalhar bastante, então eu vou ganhar muito dinheiro.

Se eu ganhar muito dinheiro, então eu vou pagar mais imposto.

Se eu pagar mais imposto, então eu trabalho bastante.