Exercícios — Técnicas de Demonstração

Método Direto

1 Demonstre que o produto de um inteiro par por um inteiro ímpar é par.

2 Prove que o produto de dois inteiros ímpares é ímpar.

3 Demonstre que se r é um número racional diferente de zero, então $\frac{1}{r}$ é racional.

4 Seja x um número inteiro. Prove que x é ímpar se e somente se existe um número inteiro b de modo que $x = 2b - 1$.

Método da Contrapositiva

5 Para todo número inteiro n, se n^2 é ímpar, então n é ímpar.

6 Demonstre que, para todo inteiro n, se $n^3 + 5$ é ímpar, então n é par.

7 Prove a seguinte sentença por contraposição.

Seja x um número inteiro. Se $x^2 + x + 1$ é par, então x é ímpar.

Método de redução ao absurdo

8 Demonstre que a soma de um número racional com um número irracional é um número irracional

9 Demonstre que o número $\sqrt{2}$ é irracional.

10 Demonstre (por meio de contra-exemplos) que as seguintes conjeturas são falsas:

a) Todo inteiro positivo é soma dos quadrados de três inteiros.

b) Se n é um número inteiro e $4n$ é par, então n é par.

c) O produto de dois números irracionais é um número irracional.

Método de indução matematica

11 Considere $P(n)$ como a proposição de que $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para todo número inteiro positivo n.

a) Qual é a proposição $P(1)$?

b) Mostre que $P(1)$ é verdadeira, completando completando o passo base da demonstração.

c) Qual é a hipótese indutiva?

d) O que você precisa para demonstrar o passo de indução?

e) Complete o passo de indução.

12 Considere $P(n)$ como a proposição de que $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ para todo número inteiro positivo n.

a) Qual é a proposição $P(1)$?

b) Mostre que $P(1)$ é verdadeira, completando completando o passo base da demonstração.

c) Qual é a hipótese indutiva?

d) O que você precisa para demonstrar o passo de indução?

e) Complete o passo de indução.

13 Demonstre que $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ sempre que n for um número inteiro não negativo.

14 Demonstre que $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

15 Mostre que 2 divide $n^2 + n$ sempre que n for um número inteiro positivo.

16 Mostre que 5 divide $n^5 - n$ sempre que n for um número inteiro positivo.

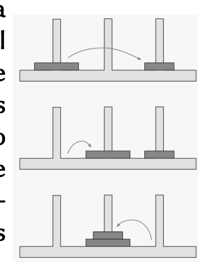
17 Demonstre que $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ sempre que n for um número inteiro não negativo.

18 Mostre que $2^n > n^2$ se n for um número inteiro maior que 4.

19 Suponha que $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ é uma matriz em que a e b são números reais. Mostre que $\mathbf{C}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ para todo número inteiro positivo n.

20 A *Torre de Hanói* é um jogo que consiste em um tabuleiro com três espigões e uma coleção de n discos de tamanhos (raios) diferentes. Os discos têm orifícios perfurados em seus centros, de modo a poderem adaptar-se aos espigões no tabuleiro. Inicialmente, todos os discos estão no primeiro espigão, dispostos por tamanho (do maior, na base, para o menor, no topo).

O objetivo é transferir todos os discos para outro espigão com o menor número possível de movimentos. Cada movimento consiste em tirar o disco de cima de um dos espigões e colocá-lo em outro espigão, com a condição de não se colocar um disco maior em cima de um disco menor. A figura mostra como resolver o problema da Torre de Hanói em três movimentos quando $n = 2$.



Prove: Para todo inteiro positivo n, o jogo da Torre de Hanói (com n discos) pode ser resolvido com $2^n - 1$ movimentos.