

Exercícios — Relações

1 Liste os pares ordenados na relação \mathcal{R} de $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ em $B = \{0, 1, 2, 3\}$ em que $(a, b) \in \mathcal{R}$ se, e somente se:

- $a = b$
- $a + b = 4$
- $a > b$
- $\text{mdc}(a, b) = 1$
- $\text{mmc}(a, b) = 2$

2 Para cada uma destas relações no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, decida se ela é reflexiva, se é simétrica, se é anti-simétrica e se é transitiva.

- $\{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$
- $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- $\{(2, 4), (4, 2)\}$
- $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
- $\{(1, 1), (2, 3), (3, 4)\}$
- $\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

3 Determine se a relação \mathcal{R} no conjunto de todas as pessoas é reflexiva, simétrica, anti-simétrica e/ou transitiva, em que $(a, b) \in \mathcal{R}$ se, e somente se:

- a é mais alto que b .
- a e b nasceram no mesmo dia.
- a e b tem um avô ou avó em comum.

4 Determine se a relação \mathcal{R} no conjunto de todas as páginas da Web é reflexiva, simétrica, anti-simétrica e/ou transitiva, em que $(a, b) \in \mathcal{R}$ se, e somente se:

- todo mundo que visitou a página a também visitou a página b .
- não há links comuns encontrados tanto na página a quanto na página b .
- existe pelo menos um link comum nas páginas a e b .
- existe uma página da Web que inclui links para ambas as páginas a e b .

5 Seja A o conjunto de livros a venda numa livraria e assuma que entre eles há livros com as seguintes propriedades:

Livro	Preço	Tamanho
U	R\$ 10	100 páginas
W	R\$ 25	125 páginas
X	R\$ 20	150 páginas
Y	R\$ 10	200 páginas
Z	R\$ 5	100 páginas

- Suponha que $(a, b) \in \mathcal{R}$ se, e somente se, o preço do livro a é maior ou igual ao preço do livro b e o tamanho de a é maior ou igual ao tamanho de b . Essa relação é reflexiva? Simétrica? Anti-simétrica? Transitiva?
- Suponha que $(a, b) \in \mathcal{R}$ se, e somente se, o preço do livro a é maior ou igual ao preço do livro b ou o tamanho de a é maior ou igual ao tamanho de b . Essa relação é reflexiva? Simétrica? Anti-simétrica? Transitiva?

6 Seja $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$ e seja $\mathcal{S} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}$. Determine $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

7 Faça o diagrama de Hasse para cada relação de ordem abaixo:

- $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \leq)$
- $(\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \{a, c\}, \{c, d\}\}, \subseteq)$

8 Liste os elementos do conjunto $\{11, 1010, 100, 1, 101, 111, 110, 1001, 10, 1000\}$ em ordem lexicográfica.

9 Considere a seguinte relação \mathcal{R} no conjunto \mathbb{N} onde $(a, b) \in \mathcal{R}$ se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $ak = b$.

- Mostre que esta é uma relação de ordem.
- Esta é uma relação de ordem total?
- Descreva o diagrama de Hasse para o subconjunto $B = \{1, 2, \dots, 21\}$.
- Determine, se existir, quem são os elementos mínimo e máximo de B .

10 Explique porque cada uma das relações definidas em $A = \{1, 2, 3\}$ abaixo não é uma relação de equivalência.

- $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (3, 2), (3, 3), (2, 3), (2, 1)\}$
- $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 3)\}$

11 Seja \mathcal{R} a relação no conjunto de todas as URLs (ou endereços na Web) tal que $x \mathcal{R} y$ se, e somente se, a página na Web em x é a mesma página na Web em y . Mostre que \mathcal{R} é uma relação de equivalência.

12 Se a e b são inteiros, defina $a \sim b$ se existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $2a + 3b = 5n$.

- Mostre que \sim define uma relação de equivalência em \mathbb{Z} .
- Determine o conjunto das classe de equivalência.

13 Seja n um inteiro positivo e S um conjunto de seqüências. Suponha que \mathcal{R}_n seja a relação em S tal que $a \mathcal{R}_n b$ se, e somente se $a = b$ ou tanto a quanto b têm, pelo menos, n caracteres e os primeiros n caracteres de a e b são os mesmos. Isto é, uma seqüência de menos de n caracteres está relacionada apenas a ela mesma; uma seqüência a com, pelo menos, n caracteres está relacionada a uma seqüência b se, e somente se, b tiver, pelo menos, n caracteres e b começar com os n caracteres no início de a . Por exemplo, seja $n = 3$ e seja S o conjunto de todas as seqüências de bits. Então $a \mathcal{R}_3 b$ ou quando $a = b$ ou quando a e b forem seqüências de bits de comprimento maior que ou igual a três que começam com os mesmos primeiros 3 bits. Por exemplo, $01 \mathcal{R}_3 01$ e $00111 \mathcal{R}_3 00101$, mas $01 \mathcal{R}_3 010$ e $01011 \mathcal{R}_3 01110$.

- Mostre que para todo conjunto S de seqüências e todo inteiro positivo n , \mathcal{R}_n é uma relação de equivalência em S .
- Qual é a classe de equivalência da seqüência 0111 relativa a \mathcal{R}_3 no conjunto de todas as seqüências de bits?