Exercícios — Limites no infinito e Derivadas

1 Considere as funções abaixo:

(I) $f(x) = \begin{cases} x; & x < 0; \\ 0; & x \geq 0; \end{cases}$ (II) $g(x) = \begin{cases} x; & x < 0; \\ 1; & x \geq 0; \end{cases}$

(III) $h(x) = \begin{cases} 5; & x \geq -2; \\ 4; & x < -2; \end{cases}$

Determine se são contínuas em:

a) $\mathbb{R}$; b) $(-2, 0)$; c) $[-2, 0]$.

2 Encontre o limite ou mostre que não existe.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2x+3}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x-x^2}{2x^2-7}$

c) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\sqrt{t}+t^2}{2t-t^2}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-3x^2+x}{x^3-x+2}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^4+x^5)$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-e^x}{1+2e^x}$

3 Um tanque contém 5.000 litros de água pura. Água salgada contendo 30 g de sal por litro de água é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 25 L/min. Mostre que a concentração de sal depois de t minutos (em gramas por litro) é

$$C(t) = \frac{30t}{200+t}$$

e diga o que acontece com essa concentração quando $t \to \infty$.

Derivada de uma função

A **derivada** de uma função f em um número a, denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

se o limite existir.

Equação da reta tangente

A reta tangente a $y = f(x)$ em $(a, f(a))$, é a reta que passa em $(a, f(a))$, cuja inclinação é igual a $f'(a)$, a derivada de f em a, ou seja,

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

4 Utilize a Definição acima a fim de encontrar a derivada de cada uma das funções em uma abcissa a do domínio:

a) $f(x) = x - 3$

b) $f(x) = 3x + 2$

c) $f(x) = x^2 + 1$

d) $f(x) = x^2 - 2x$

e) $f(x) = 2x^2 - 3$

f) $f(x) = 2x^2 - x + 2$

g) $s(t) = \dfrac{1}{t}$

5 Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ no ponto onde $x = a$. Depois, encontre as equações das retas tangentes nos pontos (1, 5) e (2, 3).