Exercícios — Limites no infinito e Derivadas

Resumo sobre Limites no Infinito

Limite fundamental: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

Consequência do Limite fundamental: Para todo número natural n e para uma constante $c \neq 0$, tem-se: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{c}{x^n} = 0$

Proposição: Seja

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

onde $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ e $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0$ são polinômios de coeficientes reais de graus n e m, respectivamente, isto é $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$. Então:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty, & \text{se } n > m \quad (1) \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{se } n = m \quad (2) \\ 0, & \text{se } n < m \quad (3) \end{cases}$$

1 Considere as funções abaixo:

(I) $f(x) = \begin{cases} x; & x < 0; \\ 0; & x \geq 0; \end{cases}$ (II) $g(x) = \begin{cases} x; & x < 0; \\ 1; & x \geq 0; \end{cases}$

(III) $h(x) = \begin{cases} 5; & x \geq -2; \\ 4; & x < -2; \end{cases}$

Determine se são contínuas em:

a) $\mathbb{R}$; b) $(-2, 0)$; c) $[-2, 0]$.

Resposta do item c) $f(x)$ é contínua em $[2, 0]$, pois $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ (desenhe o gráfico para ver isso).

$g(x)$ não é contínua em $[2, 0]$, pois $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ mas $g(0) = 1$ (desenhe o gráfico para ver isso).

$h(x)$ não é contínua em $[2, 0]$, pois $\lim\limits_{x\to -2} h(x)$ não existe (desenhe o gráfico para ver isso)

Revise os itens anteriores usando c) como modelo.

2 Encontre o limite ou mostre que não existe.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2x+3}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1 - x - x^2}{2x^2 - 7}$

c) $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t} + t^2}{2t - t^2} = -1$ pois $n = m$ como em (2) no resumo (fatore e use o limite para ver isso).

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$ Aqui vamos usar a racionalização de denominadores:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{9x^2 + x} + 3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2 + x} + 3x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2 + x - 9x^2}{\left(\sqrt{x^2(9 + \frac{1}{x})} + 3x\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\left(x \cdot \sqrt{9 + \frac{1}{x}} + 3x\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{9 + \frac{1}{x}} + 3}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{9 + \frac{1}{x}} + 3} = \frac{1}{\sqrt{9 + 0} + 3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2} = \infty$, pois $4 > 3$ como em (1) no resumo.

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^4 + x^5) = -\infty$, pois $5 > 0$ como em (1) no resumo.

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1 - e^x}{1 + 2e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x\left(\frac{1}{e^x} - 1\right)}{e^x\left(\frac{1}{e^x} + 2\right)} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^x} - 1\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^x} + 2\right)} = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2}$ pelo limite fundamental.

3 Um tanque contém 5.000 litros de água pura. Água salgada contendo 30 g de sal por litro de água é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 25 L/min. Mostre que a concentração de sal depois de t minutos (em gramas por litro) é

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

e diga o que acontece com essa concentração quando $t \to \infty$. Talvez essa vá para a prova...

Derivada de uma função

A **derivada** de uma função f em um número a, denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

se o limite existir.

Equação da reta tangente

A reta tangente a $y = f(x)$ em $(a, f(a))$, é a reta que passa em $(a, f(a))$, cuja inclinação é igual a $f'(a)$, a derivada de f em a, ou seja,

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

4 Utilize a Definição acima a fim de encontrar a derivada de cada uma das funções em uma abcissa a do domínio:

a) $f(x) = x - 3$

b) $f(x) = 3x + 2$

c) $f(x) = x^2 + 1$

d) $f(x) = x^2 - 2x$

e) $f(x) = 2x^2 - 3$

f) $f(x) = 2x^2 - x + 2$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2(a+h)^2 - (a+h) + 2 - (2a^2 - a + 2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4ah + 2h^2 - h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 4a + 2h - 1 = 4a - 1 \end{aligned}$$

Desenvolva o limite como acima nos itens anteriores para ver se entendeu o procedimento.

g) $s(t) = \dfrac{1}{t}$

$$\begin{aligned} s'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{s(a+h)-s(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{a-a-h}{(a+h)a}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{a^2 + ah} \cdot \frac{1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{a^2+ah} = \frac{-1}{a^2+0} = -\frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

5 Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ no ponto onde $x = a$. Depois, encontre as equações das retas tangentes nos pontos (1, 5) e (2, 3).

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3 + 4(a+h)^2 - 2(a+h)^3 - (3 + 4a^2 - 2a^3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{8ah + 4h^2 - 6ah^2 - 6a^2h - 2h^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 8a + 4h - 6ah - 6a^2 - 2h^2 \\ &= 8a - 6a^2 \end{aligned}$$

Pela equação da reta tangente, temos $y - f(a) = f'(a)(x-a)$, ou seja, no ponto (1, 5), temos $a = 1$. Deste modo,

$$\begin{aligned} y - (3 + 4\cdot 1^2 - 2\cdot 1^3) &= (8\cdot 1 - 6\cdot 1^2)(x-1) \\ y - (3 + 4 - 2) &= (8-6)(x-1) \\ y - 5 &= 2(x-1) \\ y &= 2x - 2 + 5 \\ y &= 2x + 3 \end{aligned}$$

No ponto (2, 3), assuma $a = 2$ na equação da reta tangente e simplifique como acima para encontrar $y = -8x + 19$.