

Exercícios — Regras de Derivação e aplicações

Resumo sobre Regras de Derivação

Conforme visto na Lista anterior, calcular derivadas usando a definição por limite pode ser bem trabalhoso. Por isso, usamos fórmulas específicas para diferentes tipos de funções como listado a seguir:

- $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$ (Regra da Constante)
- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ (Regra da Potência)
- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$ (Regra da exponencial)
- $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = \ln(a)a^x$ (Regra da exponencial geral)
- $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ (Regra do logaritmo natural)
- $f(x) = \log_b(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(b)}$ (Regra do logaritmo geral)
- $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$ (Regra do Seno)
- $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$ (Regra do Cosseno)
- $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$ (Regra da Soma)
- $f(x) = u(x) - v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) - v'(x)$ (Regra da Subtração)
- $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$ (Regra do Produto)
- $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$ onde $v(x) \neq 0$ (Regra do Quociente)
- $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ (Regra da Cadeia)

Nessa parte vamos revisar apenas as primeiras regras

Proposição: Seja

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

onde $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ e $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$ são polinômios de coeficientes reais de graus n e m , respectivamente, isto é $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$. Então:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty, & \text{se } n > m \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n < m \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Equação da reta tangente

A reta tangente a $y = f(x)$ em $(a, f(a))$, é a reta que passa em $(a, f(a))$, cuja inclinação é igual a $f'(a)$, a derivada de f em a , ou seja,

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

- Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 1)$.
- Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 5}$.
- Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.
- Derive $f(x) = 7x^4 - 3x^2 + 2x - 5$.
- Derive $f(x) = (x^3 + 2x)(5x^2 - 1)$ usando a regra do produto.
- Derive $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 3}$ usando a regra do quociente.
- Derive $f(x) = (3x^2 + 1)^5$ usando a regra da cadeia.
- Derive $f(x) = \sin(4x^2 + 1)$.
- Derive $f(x) = \cos^3(x)$.
- Derive $f(x) = x^2 \sin(x)$.
- Derive $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
- Derive $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ usando a regra da cadeia.
- Derive $f(x) = \sin(x) \cos(x)$.
- Derive $f(x) = e^{2x} + \ln x$.
- Derive $f(x) = x^2 e^x$ usando a regra do produto.
- Derive $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ usando a regra do quociente.
- Derive $f(x) = e^{x^2+1}$ usando a regra da cadeia.
- Derive $f(x) = \ln(3x^2 + 1)$.
- Derive $f(x) = (e^x + 1)^4$.
- Derive $f(x) = e^x \sin x$.
- Derive $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$.

22 Derive $f(x) = \ln(\sin x)$.

23 Derive $f(x) = \cos(e^x)$.

24 Derive $f(x) = e^{\cos x}$.

25 Derive $f(x) = x \ln x$.

26 Derive $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

27 Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 - 2x$ no ponto $x = 1$.

28 A posição de uma partícula é $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (em metros, t em segundos). Encontre a velocidade e a aceleração em $t = 2$ s.

29 Um balão esférico está sendo inflado a uma taxa de $10 \text{ cm}^3/\text{s}$. Encontre a taxa de variação do raio quando $r = 5 \text{ cm}$. (Use $V = \frac{4}{3}\pi r^3$).

30 A posição de uma partícula é $s(t) = e^t \cos t$. Encontre a velocidade e a aceleração em $t = 0$.

31 A massa de uma substância radioativa é $m(t) = 100e^{-0,02t}$ gramas. Encontre a taxa de variação da massa em $t = 10$ s.

32 A temperatura de um corpo é $T(t) = 20 + 80e^{-0,1t}$ graus Celsius. Encontre a taxa de variação da temperatura em $t = 0$.

33 Derive implicitamente $x^2 + y^2 = 25$ para encontrar dy/dx .

34 Derive implicitamente $x^3 + y^3 = 6xy$ para encontrar dy/dx .

35 Derive implicitamente $\sin(x + y) = y$ para encontrar dy/dx .

36 Derive $f(x) = \cos(1 - 2x)$.

37 Derive $f(x) = (x^2 + \sin x)^4$.

38 Derive $f(x) = \frac{x}{\cos x}$.

39 A temperatura de uma barra é $T(x) = 100 - 0.5x^2$ graus, onde x é a distância em cm. Encontre a taxa de variação da temperatura em $x = 4 \text{ cm}$.

40 Um carro se move ao longo de uma reta com posição $s(t) = 2t^2 + 3t$. Encontre a velocidade instantânea em $t = 3$.

41 Derive $f(x) = \sqrt{\sin x}$.

42 Derive $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

RESPOSTAS (Use com sabedoria!)

1 3

2 2

3 2

4 $f'(x) = 28x^3 - 6x + 2$

5 $f'(x) = 25x^4 + 27x^2 - 2$

6 $f'(x) = \frac{2x^2 - 12x - 1}{(x - 3)^2}$

7 $f'(x) = 30x(3x^2 + 1)^4$

8 $f'(x) = 8x \cos(4x^2 + 1)$

9 $f'(x) = -3 \cos^2 x \sin x$

10 $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$

11 $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

12 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$

13 $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

14 $f'(x) = 2e^{2x} + \frac{1}{x}$

15 $f'(x) = e^x(x^2 + 2x)$

16 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

17 $f'(x) = 2xe^{x^2+1}$

18 $f'(x) = \frac{6x}{3x^2 + 1}$

19 $f'(x) = 4e^x(e^x + 1)^3$

20 $f'(x) = e^x(\sin x + \cos x)$

21 $f'(x) = \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$

22 $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

23 $f'(x) = -e^x \sin(e^x)$

24 $f'(x) = -\sin x e^{\cos x}$

25 $f'(x) = \ln x + 1$

26 $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

27 $y = x - 2$

28 $v(2) = -3 \text{ m/s}$ e $a(2) = 0 \text{ m/s}^2$

29 $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{10\pi} \text{ cm/s}$

30 $v(0) = 1 \text{ m/s}$ e $a(0) = 0 \text{ m/s}^2$

31 $m'(10) = -2e^{-0,2} \text{ g/s}$

32 $T'(0) = -8 \text{ }^\circ\text{C/s}$

33 $y' = -\frac{x}{y}$

34 $y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$

35 $y' = \frac{\cos(x + y)}{1 - \cos(x + y)}$

36 $f'(x) = 2\sin(1 - 2x)$

37 $f'(x) = 4(x^2 + \sin x)^3(2x + \cos x)$

38 $f'(x) = \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}$

39 $T'(4) = -4 \text{ graus/cm}$

40 $v(3) = 15$

41 $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

42 $f'(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$