# Exercícios — Regras de Derivação

## Resumo sobre Regras de Derivação (extra)

Conforme visto na Lista anterior, calcular derivadas usando a definição por limite pode ser bem trabalhoso. Por isso, usamos fórmulas específicas para diferentes tipos de funções. Já revisamos as regras elementares e nesta lista focamos nas regras listadas a seguir:

a) $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$ (Regra do Produto)

b) $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$ onde $v(x) \neq 0$ (Regra do Quociente)

c) $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ (Regra da Cadeia)

**1** Calcular as derivadas das expressões abaixo, usando as fórmulas de derivação:

a) $y = x^2 + 4x \qquad y' = 2x + 4$

b) $y = \dfrac{2}{x^2} \qquad y' = -\dfrac{4}{x^3}$

c) $y = \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{3x}{2} \qquad y' = \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{3}{2}$

d) $f(x) = \left(3x + \dfrac{1}{x}\right)(6x - 1)$

$$y' = \left(3x + \frac{1}{x}\right)'(6x-1) + \left(3x + \frac{1}{x}\right)(6x-1)'$$

(Regra do Produto)

$$= \left(3 - \frac{1}{x^2}\right)(6x-1) + \left(3x + \frac{1}{x}\right) \cdot 6$$

$$= \left(18x - 3 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + \left(18x + \frac{6}{x}\right)$$

$$= 36x - 3 + \frac{1}{x^2}$$

e) $y = \dfrac{2x^4}{b^2 - x^2}$

$$y' = \frac{\left(2x^4\right)'\left(b^2 - x^2\right) - \left(2x^4\right)\left(b^2 - x^2\right)'}{\left(b^2 - x^2\right)^2}$$

(Regra do Quociente)

$$= \frac{\left(8x^3\right)\left(b^2 - x^2\right) - \left(2x^4\right)(-2x)}{\left(b^2 - x^2\right)^2}$$

$$= \frac{8b^2x^3 - 8x^5 + 4x^5}{\left(b^2 - x^2\right)^2}$$

f) $y = \dfrac{a - x}{a + x}$

$$y' = \frac{(a-x)'(a+x) - (a-x)(a+x)'}{(a+x)^2}$$

(Regra do Quociente)

$$= \frac{(-1)(a+x) - (a-x) \cdot 1}{(a+x)^2}$$

$$= \frac{-a - x - a + x}{(a+x)^2} = \frac{-2a}{(a+x)^2}$$

g) $y = \left(\dfrac{a - x}{a + x}\right)^3$

$$y' = \left(\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3\right)' \cdot \left(\frac{a-x}{a+x}\right)' \qquad \text{(Regra da Cadeia)}$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2 \cdot \frac{-2a}{(a+x)^2} \qquad \text{(do item anterior)}$$

$$= \frac{-6a(a-x)^2}{(a+x)^3} \qquad \text{(produto de frações)}$$

h) $y = \left(x^2 - a^2\right)^5$

$$y' = \left(\left(x^2 - a^2\right)^5\right)' \cdot \left(x^2 - a^2\right)' \qquad \text{(Regra da Cadeia)}$$

$$= 5 \cdot \left(x^2 - a^2\right)^4 \cdot (2x)$$

$$= 10x \cdot \left(x^2 - a^2\right)^4$$

**2** Determine a derivada das funções dadas:

a) $f(x) = (2x + 1)^2$

$$f'(x) = \left((2x+1)^2\right)' \cdot (2x+1)' \qquad \text{(Regra da Cadeia)}$$

$$= 2 \cdot (2x+1) \cdot 2$$

$$= 8x + 4$$

b) $f(x) = \left(x^2 + 4x - 5\right)^4$

$$f'(x) = \left(\left(x^2 + 4x - 5\right)^4\right)' \cdot \left(x^2 + 4x - 5\right)' \qquad \text{(Regra da Cadeia)}$$

$$= 4 \cdot \left(x^2 + 4x - 5\right)^3 \cdot (2x + 4)$$

$$= (8x + 16)\left(x^2 + 4x - 5\right)^3$$

c) $f(x) = (2x^4 - 7x^3)^e$

$$f'(x) = \left((2x^4 - 7x^3)^e\right)' \cdot (2x^4 - 7x^3)' \qquad \text{(Regra da Cadeia)}$$
$$= e(2x^4 - 7x^3)^{e-1} \cdot (8x^3 - 21x^2)$$

d) $f(x) = (x^2 + 4)^{-2}$

$$f'(x) = \left((x^2 + 4)^{-2}\right)' \cdot (x^2 + 4)' \qquad \text{(Regra da Cadeia)}$$
$$= (-2)(x^2 + 4)^{-3} \cdot (2x)$$
$$= (-4x)(x^2 + 4)^{-3}$$

e) $f(x) = \text{sen}\,(3x)$

$$f'(x) = (\text{sen}\,(3x))' \cdot (3x)' \qquad \text{(Regra da Cadeia)}$$
$$= 3\cos(3x)$$

f) $f(x) = \cos(6x)$

$$f'(x) = (\cos(6x))' \cdot (6x)' \qquad \text{(Regra da Cadeia)}$$
$$= -6\text{sen}\,(6x)$$

g) $f(x) = \text{sen}\,(x^2)$

$$f'(x) = \left(\text{sen}\,(x^2)\right)' \cdot (x^2)' \qquad \text{(Regra da Cadeia)}$$
$$= 2x\cos(x^2)$$

h) $f(x) = \cos(x^2)$

$$f'(x) = \left(\cos(x^2)\right)' \cdot (x^2)' \qquad \text{(Regra da Cadeia)}$$
$$= -2x \cdot \text{sen}\,(x^2)$$

i) $f(x) = \cos(3x^2 + 1)$

$$f'(x) = \left(\cos(3x^2 + 1)\right)' \cdot (3x^2 + 1)' \qquad \text{(Regra da Cadeia)}$$
$$= -6x \cdot \text{sen}\,(3x^2 + 1)$$

j) $h(x) = \dfrac{x^2 + 1}{e^{-x} + 1}$

$$h'(x) = \frac{(x^2 + 1)'\,(e^{-x} + 1) - (x^2 + 1)\,(e^{-x} + 1)'}{(e^{-x} + 1)^2}$$
(Regra do Quociente)
$$= \frac{(2x)\,(e^{-x} + 1) - (x^2 + 1)\,((-1)e^{-x})}{(e^{-x} + 1)^2}$$
$$= \frac{2xe^{-x} + 2x + (x^2 + 1)e^{-x}}{(e^{-x} + 1)^2}$$
$$= \frac{2x + (x^2 + 2x + 1)e^{-x}}{(e^{-x} + 1)^2}$$

**3** Encontre a derivada da função com as devidas regras.

a) $f(r) = r^2$

$$f'(r) = 2r$$

b) $f(z) = 14 - \dfrac{1}{2}z^{-3}$

$$f'(z) = -\frac{1}{2}(-3)z^{-3-1} = \frac{3}{2}z^{-4}$$

c) $f(x) = \left(3x^5 - 1\right)\left(2 - x^4\right)$

$$f'(x) = \left(3x^5 - 1\right)'\left(2 - x^4\right) + \left(3x^5 - 1\right)\left(2 - x^4\right)'$$
(Regra do Produto)
$$= 15x^4\left(2 - x^4\right) + \left(3x^5 - 1\right)\left(-4x^3\right)$$
$$= 30x^4 - 15x^8 - 12x^8 + 4x^3$$
$$= -27x^8 + 30x^4 + 4x^3$$

d) $f(x) = 7\left(ax^2 + bx + c\right)$

$$f'(x) = 7\,(2ax + b)$$

e) $f(t) = \dfrac{3t^2 + 5t - 1}{t - 1}$

$$\frac{df}{dt} = \frac{(3t^2 + 5t - 1)'(t - 1) - (3t^2 + 5t - 1)\,(t - 1)'}{(t - 1)^2}$$
(Regra do Quociente)
$$= \frac{(6t + 5)(t - 1) - (3t^2 + 5t - 1) \cdot 1}{(t - 1)^2}$$
$$= \frac{6t^2 - 6t + 5t - 5 - 3t^2 - 5t + 1}{(t - 1)^2}$$
$$= \frac{3t^2 - 6t - 4}{(t - 1)^2}$$

f) $f(s) = \dfrac{1}{2s^4} + \dfrac{2}{s^6}$

$$\frac{df}{ds} = -4\frac{1}{2s^5} + (-6)\frac{2}{s^7} \qquad \text{(Potência de expoente negativo)}$$
$$= -\frac{2}{s^5} - \frac{12}{s^7}$$

g) $f(x) = 4x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2}4x^{\frac{1}{2}-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)5x^{-\frac{1}{2}-1}$$
(Potência de expoente fracionário)
$$= 2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

h) $f(x) = \operatorname{sen}(3x^2)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\operatorname{sen}(3x^2)\right)' \cdot (3x^2)' \qquad \text{(Regra da Cadeia)} \\ &= 6x \cdot \cos(3x^2) \end{aligned}$$

**4** Calcule em cada item a derivada de ordem superior indicada.

a) $f(x) = x^5 - 2x^3 + x, \quad f''$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 6x^2 + 1 \\ f''(x) &= 20x^3 - 12x \end{aligned}$$

b) $f(x) = 2x^4 + 3, \quad f'''$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x^3 \\ f''(x) &= 24x^2 \\ f'''(x) &= 48x \end{aligned}$$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2, \quad f'''$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2}{x^3} \\ f''(x) &= \frac{6}{x^4} \\ f'''(x) &= -\frac{24}{x^5} \end{aligned}$$

d) $f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad f''$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) \\ f''(x) &= -\operatorname{sen}(x) \end{aligned}$$

e) $f(x) = \cos(x), \quad f'''$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\operatorname{sen}(x) \\ f''(x) &= -\cos(x) \\ f'''(x) &= \operatorname{sen}(x) \end{aligned}$$

f) $f(x) = 3x^4 - 2x, \quad f^{(5)}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 - 2 \\ f''(x) &= 36x^2 \\ f'''(x) &= 72x \\ f^{(4)}(x) &= 72 \\ f^{(5)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

g) $f(x) = \frac{1}{e^x}, \quad f^{(4)}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{e^x} \\ f''(x) &= \frac{1}{e^x} \\ f'''(x) &= -\frac{1}{e^x} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{1}{e^x} \end{aligned}$$

**5** (Desafio) Sabendo que $\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot \ln a}$, para todo $a > 0$, determine a derivada de $5^{-\frac{1}{x}}$ e $10^{1-x^2}$ usando a Regra da Cadeia.

Seguindo a expressão dada, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(5^{-\frac{1}{x}}) &= 5^{-\frac{1}{x}} \cdot \ln 5 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)' \qquad \text{(Regra da Cadeia)} \\ &= 5^{-\frac{1}{x}} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= 5^{-\frac{1}{x}} \cdot \ln 5^{\frac{1}{x^2}} \\ &\qquad \text{(Propriedade de potência de logaritmo)} \end{aligned}$$

De modo similar, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(10^{1-x^2}) &= 10^{1-x^2} \cdot \ln 10 \cdot (1-x^2)' \qquad \text{(Regra da Cadeia)} \\ &= 10^{1-x^2} \cdot \ln 10 \cdot -2x \\ &= 10^{1-x^2} \cdot \ln 10^{-2x} \\ &\qquad \text{(Propriedade de potência de logaritmo)} \end{aligned}$$