Exercícios — Regras de Integração e o TFC

Resumo sobre Regras de Integração

Conforme visto em sala, o processo inverso de calcular derivadas levas às chamadas primitivas (se $F'(x) = f(x)$, dizemos que $F(x)$ é uma *primitiva* de $f(x)$), que também são chamadas de *integrais indefinidas*, pois

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

Já revisamos as regras elementares e nesta lista focamos nas regras listadas a seguir:

i) $\int du = u + C$ (tem aquele 1 oculto ali...)

ii) $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

iii) $\int \dfrac{1}{u} du = \ln|u| + C$

iv) $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$

v) $\int e^u du = e^u + C$

vi) $\int \operatorname{sen}(u)\,du = -\cos(u) + C$

vii) $\int \cos(u)\,du = \operatorname{sen}(u) + C$

viii) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

ix) $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$, onde $k \in \mathbb{R}$ é constante.

Sabendo calcular integrais indefinidas, podemos calcular as chamadas integrais definidas usando o **Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)**:

Se f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

em que F é qualquer primitiva de f para todo x em $[a, b]$.

Observação: Você deve fazer uma distinção cuidadosa entre integral definida e indefinida.

Uma integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ é um *número*, enquanto uma integral indefinida $\int f(x)\,dx$ é uma *função* (a primitiva ou uma família de funções a depender da constante).

1 Calcule as primitivas das seguintes funções abaixo, usando as fórmulas de integração:

a) $y = (1-x)(1+x)^2$

b) $y = \dfrac{1}{x^3} - \cos(2x)$

c) $y = \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{3x}{2}$

d) $y = x^4 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x}{4} - 2e^x$

e) $z = y^3 + 1,8y^2 - 2,4y$

2 Calcule as integrais definidas dadas usando o TFC:

a) $\int_0^2 (6x^2 - 4x + 5)\,dx$

b) $\int_1^3 (1 + 2x - 4x^3)\,dx$

c) $\int_{-2}^0 \left(\dfrac{t^4}{2} + \dfrac{t^3}{4} - t\right) dt$

d) $\int_0^3 (1 + 6w^2 - 10w^4)\,dw$

e) $\int_{-1}^3 t(1-t)^2\,dt$

f) $\int_0^\pi (5e^x + 3\operatorname{sen}(x))\,dx$

g) $\int_1^2 \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4}{x^3}\right) dx$

h) $\int_0^4 (3^t - 2e^t)\,dt$

i) $\int_1^2 \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x}\right) dx$

3 Usando a Regra da Substituição $\boxed{\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du}$, escolha u e calcule:

a) $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$

b) $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx$

4 A Regra da Substituição pode ser adaptada para integrais definidas da seguinte forma

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du},$$

onde $g(a)$ e $g(b)$ são as respectivas imagens de a e b pela função g. Usando isso, calcule:

a) $\int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1)^5\,dx$

b) $\int_1^e \dfrac{\ln x}{x}\,dx$