UEG Câmpus Posse

Cálculo Diferencial e Integral (2025.1)

Simulado — Derivadas e Integrais

Resumo sobre Derivadas e Integrais

Mini tabela de Derivadas e Integrais

Função $f(x)$	Derivada $f'(x)$	Primitiva $F(x)$
k (constante)	0	$kx + C$
$x^p,\ p \neq -1$	$p \cdot x^{p-1}$	$\dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$a^x,\ a > 0$	$a^x \cdot \ln a$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$	$\operatorname{sen}(x) + C$
$k \cdot f(x)$	$k \cdot f'(x)$	$k \cdot F(x) + C$

Casos especiais e resultados importantes:

a) $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$ (Regra do Produto)

b) $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ (Regra da Cadeia)

c) Conhecendo as primitivas, calculamos integrais definidas com o **Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)**:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

em que F é qualquer primitiva de f para todo x em $[a, b]$.

d) Ao identificar uma função que pode ser escrita como $f(g(x))g'(x)$, podemos fazer a substituição $g(x) = u$ para simplificar a integral, obtendo a Regra da Substituição:

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

onde $du = g'(x)\, dx$.

e) O trabalho realizado por uma força quando desloca um objeto de a até b ao longo deste eixo x, é dado por:

$$T = \int_a^b f(x)\, dx$$

f) Considere o sólido de revolução S obtido girando a região delimitada por uma função f ao redor do eixo dos x. Então o volume $V(S)$ do sólido S é:

$$V(S) = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

g) O comprimento L de um arco ao longo do gráfico de $f(x)$ é:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

onde $(f'(x))^2$ é o quadrado da derivada de $f(x)$.

1 Calcule as derivadas das funções a seguir:

a) $f(x) = -4x^2 \cos(x)$

$f'(x) = -8x\cos(x) - 4x^2 \operatorname{sen}(x)$

(Regra do Produto)

b) $f(x) = (x^2 + 3)^7$

$$f'(x) = 7(x^2+3)^6 \cdot 2x = 14x(x^2+3)^6$$

(Regra da Cadeia)

c) $f(x) = \dfrac{3x + 4}{x^2 + 1}$

$$f'(x) = \frac{3(x^2+1) - 2x(3x+4)}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2 + 3 - 6x^2 - 8x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2 - 8x + 3}{(x^2+1)^2}$$

(Regra do Quociente)

d) $f(x) = \sqrt{x^3 + 5}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3+5}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}$$

(Regra da Cadeia)

2 Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta.

a) Se $g(x) = f(x)\operatorname{sen}(x)$, então $g(x) = f'(x)\cos(x)$.

Falso: pela Regra do Produto temos $g'(x) = f'(x)\operatorname{sen}(x) + f(x)\cos(x)$

b) Se $g(x) = f(x)\operatorname{sen}(x)$, então $g'(0) = f(0)$.

Verdadeiro: pela Regra do Produto do item anterior, temos $g'(0) = f'(0)\operatorname{sen}(0) + f(0)\cos(0) = f(0)$, pois $\operatorname{sen}(0) = 0$ e $\cos(0) = 1$

c) A derivada de ordem 87 da função seno é o cosseno, ou seja, se $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, então $f^{(87)}(x) = \cos(x)$.

Falso: vimos que a cada 4 derivações das funções trigonométricas, elas se repetem. Como $87 = 4 \cdot 21 + 3$, é como se tivéssemos 21 repetições seguidas de mais 3 derivações. Como $f'(x) = \cos(x)$, $f'' = -\operatorname{sen}(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$, então $f^{(87)}(x) = -\cos(x)$.

3 Calcule:

a) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (x^2 + 2x + 4)\, dx$

$$= \left.\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x\right|_{-2}^{1} = \frac{1}{3} + 1 + 4 - \frac{(-8)}{3} - 4 - 4(-2) = \frac{9}{3} + 9 = \boxed{12}$$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^6}\, dx$

$$= \left.\frac{1}{-5x^5}\right|_1^2 = \frac{1}{-5 \cdot 32} - \frac{1}{-5} = -\frac{1}{160} + \frac{1}{5} = -\frac{1}{160} + \frac{32}{160} = \boxed{\frac{31}{160}}$$

4 Uma partícula é localizada a uma distância de x cm da origem. Uma força de $(2x^4+5x^3+x^2)$ N age sobre a partícula quando a mesma se move de $x = 2$ até $x = 5$. Qual é o trabalho realizado pela partícula para deslocar-se?

$$\begin{aligned} T &= \int_a^b f(x)\,dx = \int_2^5 (2x^4+5x^3+x^2)\,dx \\ &= \frac{2x^5}{5} + \frac{5x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\Bigg|_2^5 \\ &= \frac{2\cdot 5^5}{5} + \frac{5\cdot 5^4}{4} + \frac{5^3}{3} - \left(\frac{2\cdot 2^5}{5} + \frac{5\cdot 2^4}{4} + \frac{2^3}{3}\right) \\ &= 2\cdot 625 + \frac{3125}{4} + \frac{125}{3} - \left(\frac{64}{5} + \frac{80}{4} + \frac{8}{3}\right) \\ &= 1250 + \frac{3045}{4} + \frac{117}{3} - \frac{64}{5} \\ &= 1250 + 761,25 + 39 - 12,8 = \boxed{2037,45} \end{aligned}$$

5 Quanto vale a área acima do eixo x e abaixo de $y = 4x^3$ no intervalo $[0, 3]$?

$*$ Lembre-se que, geometricamente, área entre o gráfico de uma função contínua e o eixo num intervalo é o resultado da integral definida dessa função no referido intervalo. Dessa forma,

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^3 4x^3\,dx \\ &= \frac{4x^4}{4}\Bigg|_0^3 = x^4\Big|_0^3 \\ &= 3^4 - 0 = \boxed{81} \end{aligned}$$

6 Encontre o volume do sólido obtido quando a região sob a curva $y = x^2$ acima do intervalo $[1, 3]$ é girada em torno do eixo x conforme a figura ao lado.

$$\begin{aligned} V(S) &= \pi \int_a^b f(x)^2\,dx = \int_1^3 x^4\,dx \\ &= \pi\left(\frac{x^5}{5}\Bigg|_1^3\right) = \pi\left(\frac{3^5}{5} - \frac{1}{5}\right) \\ &= \pi\left(\frac{243-1}{5}\right) = \boxed{\frac{242\pi}{5}} \end{aligned}$$