AVALIAÇÃO — Derivadas e Aplicações

1 Usando a definição $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, calcule a derivada no ponto a da função $f(x) = -6x + 15$:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-6(a+h)+15-[-6(a)+15]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-6a-6h+15+6a-15}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-6h}{h} = \boxed{-6} \end{aligned}$$

2 Utilize as Regras de Derivação para calcular a derivada $f'(x)$ de cada uma das funções a seguir:

a) $f(x) = \frac{5x^4}{2} + \frac{3x^3}{3} - \ln(x) \Rightarrow f'(x) = 10x^3 + 3x^2 - \frac{1}{x}$

b) $g(x) = \frac{x^{-7}}{4} + e^x - \operatorname{sen}(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{-7x^{-8}}{4} + e^x - \cos(x)$

c) $h(x) = \cos(x^3) + \sqrt{x+1} \Rightarrow h'(x) = -\operatorname{sen}(x^3)\cdot 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

3 O comprimento ventricular esquerdo (visto da frente do coração) de um feto humano com pelo menos 18 semanas pode ser estimado por:

$$c(x) = -2,318 + 0,2356x - 0,002674x^2,$$

onde $c(x)$ é o comprimento ventricular (em centímetros) e x é a idade (em semanas) do feto.

Fonte: *American Journal of Cardiology.*

Encontre $c'(x)$ e calcule $c'(25)$.

$$\begin{aligned} c(x) &= -2,318 + 0,2356x - 0,002674x^2 \\ \Rightarrow c'(x) &= 0,2356 - 0,005348x \\ \Rightarrow c'(25) &= 0,2356 - 0,005348\cdot 25 \\ &= 0,2356 - 0,1337 = \boxed{0,1019} \end{aligned}$$

4 Alguns psicólogos acreditam que o número de fatos de um certo tipo que são lembrados depois de t horas é dado por

$$f(t) = \frac{90t}{99t-90}.$$

Encontre a taxa a qual o número de fatos lembrados está mudando após 10 horas.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{90(99t-90) - 90t(99)}{(99t-90)^2} \\ &= \frac{8910t - 8100 - 8910t}{(99t-90)^2} \\ &= \frac{-8100}{(99t-90)^2} \\ \Rightarrow f'(10) &= \frac{-8100}{(99\cdot 10 - 90)^2} \\ &= \frac{-8100}{(900)^2} = \frac{-81}{8100} = \boxed{-0,01} \end{aligned}$$

5 Suponha que a população P de certa espécie de peixe depende do número x (em centenas) de um peixe menor que serve como seu alimento, de modo que

$$P(x) = x^2 + 1.$$

Também suponha que o número de peixes menores depende da quantidade z (em unidades apropriadas) de seu alimento, um tipo de *plankton*. Especificamente,

$$x = f(z) = 3z + 2.$$

Um biólogo quer encontrar a relação entre P e z, ou seja, $P(f(z))$. Qual é essa relação? A que taxa essa relação varia quando $z = 7$?

$P(f(z)) = P(3z+2) = (3z+2)^2+1 \Rightarrow P'(f(z)) = 2(3z+2)\cdot 3 = 18z + 12$. Quando $z = 7$, então $P'(f(z)) = 18\cdot 7 + 12 = \boxed{138}$.

6 Um vazamento de petróleo na Costa do Golfo está espalhando óleo no mar formando uma mancha com formato de círculo. Em qualquer tempo t (em minutos) depois do começo do vazamento o raio da mancha de óleo é $r(t) = t^2$ metros. Seja $A(r) = \pi r^2$ a área de um círculo de raio r. Encontre $A(r(t))$ e calcule $\frac{dA}{dt}$ quando $t = 100$.

$A(r(t)) = \pi(t^2)^2 = \pi t^4 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 4\pi t^3$. Quando $t = 100$, então $\frac{dA}{dt}(100) = 4\pi(100)^3 = \boxed{4\pi 10^6} \approx 12566370,6$.

7 O consumo de energia durante locomoção de um lagarto é dado por

$$E = 26,5m^{-0,34},$$

onde m representa a massa do lagarto (em quilogramas) e E é o consumo de energia (em kcal/kg/km). Suponha que a massa de um lagarto de 5 kg está aumentando a uma taxa de 0,05 kg por dia. Encontre a taxa a qual o consumo de energia está mudando com respeito ao tempo.

Fonte: *Wildlife Feeding and Nutrition.*

Como $E = 26,5m^{-0,34}$, então $\frac{dE}{dm} = -0,34 \cdot 26,5m^{-1,34} = -9,01m^{-1,34}$ e para $m = 5$, $\frac{dE}{dm} = -9,01 \cdot 5^{-1,34} = -1,042569427$. Queremos a taxa a qual o consumo de energia está mudando com respeito ao tempo, ou seja, $\frac{dE}{dt}$ e sabemos do enunciado que $\frac{dm}{dt} = 0,05$. Então $\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dm}\frac{dm}{dt} = -1,042569427 \cdot 0,05 = \boxed{-0,052128471}$.

8 A relação entre o número de espécies em um gênero x e o número de gêneros y que compõem x espécies é dada por

$$xy^a = k,$$

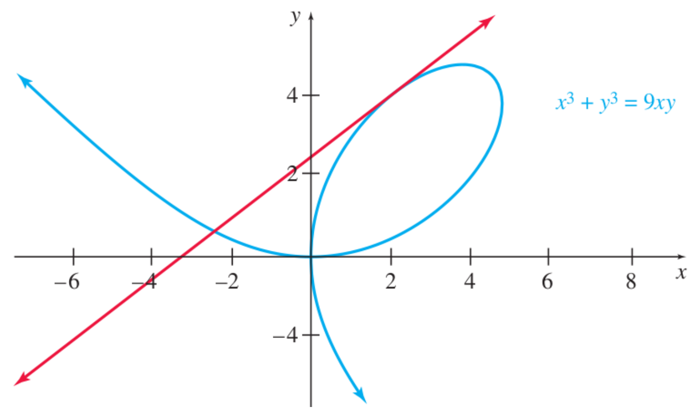
onde a e k são constantes. Encontre $\frac{dy}{dx}$ usando derivação implícita sabendo que y depende de x.

Fonte: *Elements of Mathematical Biology.*

Derivando $xy^a = k$ de ambos os lados com a Regra do Produto, temos

$$y^a + x \cdot ay^{a-1}\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\Rightarrow axy^{a-1}\frac{dy}{dx} = -y^a$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y^a}{axy^{a-1}} = \frac{-y \cdot \cancel{y^{a-1}}}{ax\cancel{y^{a-1}}} = \frac{-y}{ax}$$

Desafio (2 pontos extras)



O gráfico de $x^3+y^3 = 9xy$ exibido acima é um *fólio de Descartes*. Encontre a equação da reta tangente no ponto $(2,4)$ como mostrado. *Dica: Use derivação implícita com as devidas regras. (Obs.: Este é um desafio e, para ganhar os pontos extras, a resposta, além de estar correta, deve estar explicada como feito nos exemplos resolvidos em sala.)*

Derivando $x^3 + y^3 = 9xy$ de ambos os lados com a Regra do Produto e derivação implícita, temos

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 9x\frac{dy}{dx} + 9y$$
$$\Rightarrow 3y^2\frac{dy}{dx} - 9x\frac{dy}{dx} = 9y - 3x^2$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(3y^2 - 9x) = 9y - 3x^2$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{9y-3x^2}{3y^2-9x} = \frac{3(3y-x^2)}{3(y^2-3x)} = \frac{3y-x^2}{y^2-3x}$$

Agora, para encontrar a inclinação da reta tangente no ponto $(2,4)$, fazemos $x = 2$ e $y = 4$, ou seja,

$$m = \frac{3y-x^2}{y^2-3x} = \frac{3(4)-2^2}{4^2-3(2)} = \frac{12-4}{16-6} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Assim, a equação da reta será

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$\Rightarrow y - 4 = \frac{4}{5}(x-2)$$
$$\Rightarrow y - 4 = \frac{4x}{5} - \frac{8}{5}$$
$$\Rightarrow y = \frac{4x}{5} + \frac{12}{5}$$