EXERCÍCIOS — Máximos e Mínimos, Integrais e aplicações

Resumo sobre Derivadas e Integrais

Função $f(x)$	Derivada $f'(x)$	Primitiva $F(x)$
k (constante)	0	$kx + C$
$x^p,\ p \neq -1$	$p \cdot x^{p-1}$	$\dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$a^x,\ a > 0$	$a^x \cdot \ln a$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$
e^{kx}	$k \cdot e^{kx}$	$\dfrac{e^{kx}}{k} + C$
$\operatorname{sen}(kx)$	$k \cdot \cos(kx)$	$-\dfrac{\cos(kx)}{k} + C$
$\cos(kx)$	$-k \cdot \operatorname{sen}(kx)$	$\dfrac{\operatorname{sen}(kx)}{k} + C$

∗ Nas últimas 3 linhas, o termo kx designa uma constante real não-nula qualquer onde as derivadas precisam ser calculadas pela Regra da Cadeia e, de forma similar, as primitivas fazem o processo inverso (note que, quando $k = 1$, temos as fórmulas usuais conforme a tabela do livro). Contudo, se a "função de dentro" não for linear, podemos calcular a derivada pela Regra da Cadeia enquanto a primitiva (integral indefinida) terá de ser feita pela Regra da Substituição.

Máximos e mínimos

1 Determine o valor de x que minimiza $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

2 Determine o valor de x que maximiza $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$.

3 Determine e classifique os pontos críticos de $f(x) = x^3 - 12x$.

4 Uma empresa vende q unidades ao preço unitário $p(q) = 100 - 2q$. A receita é $R(q) = q\,p(q)$. Determine q que maximiza a receita.

5 O custo total é $C(q) = q^2 + 16q + 100$. Determine $q > 0$ que minimiza o custo médio

$$C_{\text{me}}(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

6 Um retângulo tem perímetro 40. Se um lado mede x, o outro mede $20 - x$. Determine x que maximiza a área.

7 A concentração de um medicamento é $C(t) = te^{-t}$, para $t \geq 0$. Determine t que maximiza $C(t)$.

Integrais indefinidas

8 Calcule

$$\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx.$$

9 Calcule

$$\int (e^x + 2\cos x)\,dx.$$

10 Calcule

$$\int \left(\frac{1}{x} + 3\operatorname{sen} x\right)\,dx.$$

11 Calcule

$$\int (x^3 + e^x - \operatorname{sen} x)\,dx.$$

12 Calcule

$$\int (6x^2 + 2x)\,dx.$$

13 Calcule

$$\int (\cos x - e^x)\,dx.$$

14 Calcule

$$\int \left(\frac{1}{x} + x^2\right)\,dx.$$

15 Calcule

$$\int (5\operatorname{sen} x - 2e^x + x)\,dx.$$

Integrais definidas

16 Calcule

$$\int_0^1 (3x^2 + 2x)\,dx.$$

17 Calcule

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx.$$

18 Calcule

$$\int_0^{1} e^x \, dx.$$

19 Calcule

$$\int_1^{e} \frac{1}{x} \, dx.$$

20 Calcule

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx.$$

21 Calcule

$$\int_{-1}^{1} x^3 \, dx.$$

Regra da substituição

22 Calcule

$$\int 2x\, e^{x^2} \, dx.$$

23 Calcule

$$\int \cos(3x) \, dx.$$

24 Calcule

$$\int \frac{x}{x^2+1} \, dx.$$

25 Calcule

$$\int e^{2x} \operatorname{sen}(e^{2x}) \, dx.$$

Integração por partes

26 Calcule

$$\int x e^x \, dx.$$

27 Calcule

$$\int x \cos x \, dx.$$

28 Calcule

$$\int \ln x \, dx, \qquad x > 0.$$

29 Calcule

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx.$$

Áreas

30 Determine a área entre $y = x^2$ e $y = x$ para $0 \le x \le 1$.

31 Determine a área entre $y = e^x$ e $y = 1$ para $0 \le x \le 1$.

32 Determine a área sob $y = \cos x$, acima do eixo x, para $0 \le x \le \pi/2$.

33 Determine a área entre $y = x$ e $y = x^3$ para $0 \le x \le 1$.

Volumes de revolução

34 Determine o volume obtido ao girar $y = x$, $0 \le x \le 2$, em torno do eixo x.

35 Determine o volume obtido ao girar $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, em torno do eixo x.

36 Determine o volume obtido ao girar $y = e^x$, $0 \le x \le 1$, em torno do eixo x.

37 Determine o volume obtido ao girar $y = \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$, em torno do eixo x.

Gabarito

1 $x = -1$.

2 $x = 2$.

3 $x = -2$ é máximo local; $x = 2$ é mínimo local.

4 $q = 25$.

5 $q = 10$.

6 $x = 10$.

7 $t = 1$.

8 $x^3 - 2x^2 + 5x + C$.

9 $e^x + 2\operatorname{sen} x + C$.

10 $\ln|x| - 3\cos x + C$.

11 $\frac{x^4}{4} + e^x + \cos x + C$.

12 $2x^3 + x^2 + C$.

13 $\operatorname{sen} x - e^x + C$.

14 $\ln|x| + \frac{x^3}{3} + C$.

15 $-5\cos x - 2e^x + \frac{x^2}{2} + C$.

16 2.

17 2.

18 $e - 1$.

19 1.

20 1.

21 0.

22 $e^{x^2} + C$.

23 $\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) + C$.

24 $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

25 $-\frac{1}{2}\cos(e^{2x}) + C$.

26 $e^x(x-1) + C$.

27 $x\operatorname{sen} x + \cos x + C$.

28 $x\ln x - x + C$.

29 $-x\cos x + \operatorname{sen} x + C$.

30 $\frac{1}{6}$.

31 $e - 2$.

32 1.

33 $\frac{1}{4}$.

34 $\frac{8\pi}{3}$.

35 $\frac{\pi}{5}$.

36 $\frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$.

37 $\frac{\pi^2}{2}$.