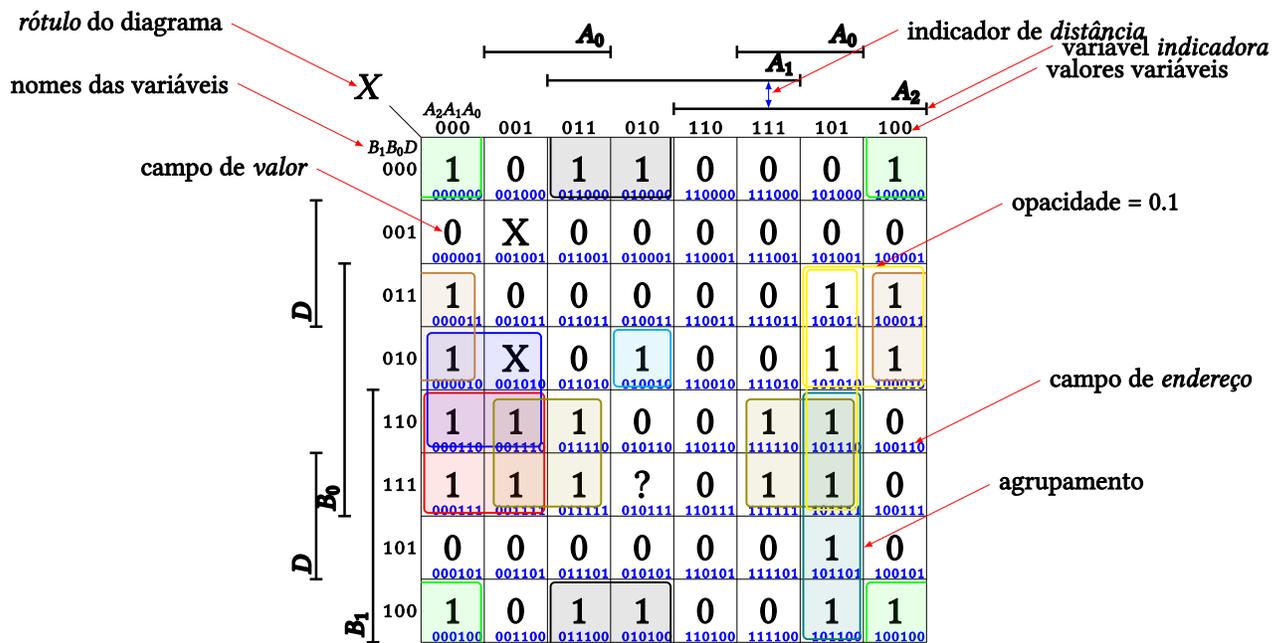


FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA PARA COMPUTAÇÃO



$$X = \overline{A_2} \overline{A_1} B_1 B_0 + \overline{A_2} \overline{A_1} B_0 \overline{D} + \overline{A_1} \overline{A_0} B_0 \overline{D} + \overline{A_2} \overline{A_1} \overline{B_0} \overline{D} + A_0 B_1 B_0 + \overline{A_1} \overline{A_0} \overline{B_1} B_0 + \overline{A_2} \overline{A_1} \overline{A_0} B_0 + \overline{A_2} \overline{A_1} \overline{A_0} \overline{B_1} B_0 \overline{D}$$

ou

$$X = \overline{A_2} \overline{A_1} B_1 B_0 + \overline{A_2} \overline{A_1} B_0 \overline{D} + \overline{A_1} \overline{A_0} B_0 \overline{D} + \overline{A_2} \overline{A_1} \overline{B_0} \overline{D} + A_0 B_1 B_0 + \overline{A_1} \overline{A_0} \overline{B_1} B_0 + \overline{A_2} \overline{A_1} \overline{B_1} B_0 + \overline{A_2} \overline{A_1} \overline{A_0} \overline{B_1} B_0 \overline{D}$$

CONTEÚDO

CAPÍTULO 1 PENSAMENTO LÓGICO PÁGINA 1

1.1	Lógica Formal	1
1.2	Conectivos e Proposições	1
	• Tabelas Verdade	2
1.3	Equivalências Lógicas	4
	• Exercícios propostos	6
1.4	Lógica Proposicional	7
1.5	Regras de Dedução	8
	• Sequências de Prova	9
	• Exercícios propostos	10
1.6	Lógica de Predicados	11
	• Exercícios propostos	16
1.7	Conectivos Lógicos no Mundo Real	17
	• Algoritmos e Lógica de Programação	18
	• Exercícios propostos	20

CAPÍTULO 2 PENSAMENTO ESTRUTURAL PÁGINA 21

2.1	Conjuntos	21
	• Novos Conjuntos a Partir de Antigos	22
	• Exercícios Propostos	25
2.2	Funções	26
	• Definição e Exemplos	26
	• Funções Injetivas e Sobrejetivas	29
	• Composição de funções	31
	• Exercícios Propostos	31
2.3	Algumas funções importantes em Computação	32
	• Quociente inteiro e resto	32
	• Dispersão	33

CAPÍTULO 3 PENSAMENTO QUANTITATIVO PÁGINA 35

3.1	Sequências	35
	• Somatórios	36
	• Exercícios propostos	38

3.2	Técnicas de Contagem	39
	• Técnicas Básicas de Contagem	39
	• Multiplicação	40
	• Mesclando Adição e Multiplicação	43
	• Exercícios propostos	44
	• Seleções e Arranjos	45
3.3	Teorema do Binômio	50
	• Exercícios propostos	52
3.4	Contando com Funções	54

PENSAMENTO LÓGICO

O negócio dos matemáticos é afirmar coisas precisamente. Quando você lê uma sentença matemática, deve levar a sério cada palavra; uma boa linguagem matemática transmite uma mensagem clara, sem ambiguidades. Para ler e escrever matemática, você deve praticar a arte do pensamento lógico. O objetivo deste capítulo é ajudá-lo a se comunicar matematicamente pelo entendimento básico da lógica. Atenção: lógica matemática pode ser difícil — especialmente se for a primeira vez que você vê isso. Este capítulo começa com o estudo da lógica formal, ou simbólica, e depois aplica esse estudo à linguagem matemática. Espere que as coisas sejam um pouco nebulosas no começo, mas no final (esperamos) a neblina irá clarear.

1.1 Lógica Formal

Notação é uma parte importante da linguagem matemática. Os quadros-negros dos matemáticos geralmente estão cheios de todo tipo de caracteres e símbolos estranhos; tal exibição pode ser intimidadora para os novatos, mas existe uma boa razão para comunicar dessa maneira. Geralmente o ato de reduzir um problema a uma linguagem simbólica nos ajuda ver o que realmente está acontecendo. Em vez de operar no mundo vago da prosa, traduzimos um problema para notação matemática e depois realizamos manipulações simbólicas bem definidas sobre essa notação. Essa é a essência de uma poderosa ferramenta chamada *formalismo*. Nesta seção, exploramos como uma abordagem formal à lógica pode ajudar a evitar erros de raciocínio.

Nota:

Usaremos a palavra *formal* para descrever o processo que consiste em manipular notações. Geralmente as pessoas usam essa palavra para significar “rigoroso”, mas essa não é a nossa intenção. Um argumento formal pode ser rigoroso, mas um argumento que não depende de símbolos também pode.

Uma característica agradável do formalismo é permitir que você trabalhe sem ter que pensar sobre o que os símbolos significam. Nesse sentido, lógica formal é na verdade um “não pensamento lógico”. Por que isso é uma vantagem? Cálculos formais são menos propensos a erros. Você já está familiarizado com esses fenômenos: muito da aritmética que você aprendeu na escola era formal. Você tem um algoritmo simbólico bem definido para multiplicar números usando lápis e papel, e consegue multiplicar de forma bem eficiente números de três dígitos sem nem pensar muito sobre o que realmente está fazendo. Claro, o formalismo não faz sentido se você não sabe o que está fazendo; no final de qualquer cálculo formal, é importante ser capaz de interpretar os resultados.

1.2 Conectivos e Proposições

A fim de formalizar a lógica, precisamos de um sistema para traduzir afirmações em símbolos. Vamos começar com uma definição precisa de *sentença*.

Definição 1.1

Uma *sentença* (também conhecida por *proposição*) é uma frase declarativa que pode ser falsa ou verdadeira, mas não as duas ao mesmo tempo.

São exemplos de sentenças:

☞ 7 é ímpar.

☞ $1 + 1 = 4$

☞ Se está chovendo, então o chão está molhado.

☞ O nosso professor é de Marte.

Note que não precisamos ser capazes de decidir se a sentença é verdadeira ou falsa para que seja uma sentença. Ou nosso professor é de Marte, ou nosso professor não é de Marte, ainda que não estejamos certos de qual é o caso.

Como pode uma frase declarativa falhar em ser uma sentença? Existem duas maneiras principais. Uma frase declarativa pode conter um termo não especificado:

x é par.

Nesse caso, x é chamado de *variável livre*. A veracidade da frase depende do valor de x , logo, se esse valor não é especificado, não podemos considerar que essa frase é uma sentença. Um segundo tipo de frase declarativa que não é uma sentença ocorre quando uma frase é *autorreferencial*:

Esta frase é falsa.

Não podemos decidir se essa frase é verdadeira ou não. Se dizemos que é verdadeira, então ela diz ser falsa; se dizemos que é falsa, então ela parece ser verdadeira.

Geralmente, uma sentença complicada consiste em várias sentenças simples unidas por palavras como “e”, “ou”, “se... então” etc. Essas palavras conectivas são representadas pelos *cinco conectivos lógicos* mostrados na Tabela 1.1. Conectivos lógicos são úteis para decompor sentenças compostas em sentenças mais simples. Eles ressaltam propriedades lógicas importantes da sentença.

A fim de utilizar um sistema formal para a lógica, devemos ser capazes de *traduzir* uma sentença em português em sua contrapartida formal. Fazemos isso atribuindo letras para sentenças simples e depois construindo expressões com conectivos.

Exemplo 1.1

Se p é a sentença “você está usando sapatos” e q é a sentença “você não pode cortar as unhas do pé”, então

$$p \rightarrow q$$

representa a sentença: “Se você está usando sapatos, então não pode cortar as unhas do pé.” Podemos optar por expressar essa sentença de formas diferentes em português: “Você não pode cortar as unhas do pé se está usando sapatos”, ou “Usando sapatos é impossível cortar as unhas do pé”. A sentença $\neg q$ é traduzida literalmente em “Não é o caso de você não poder cortar as unhas do pé”. E claro, em português, preferiríamos dizer simplesmente, “Você pode cortar as unhas do pé”, mas isso envolve usar lógica, como veremos na seção seguinte.

Nome	Símbolo
e (conjunção)	\wedge
ou (disjunção)	\vee
não (negação)	\neg
implica (se... então)	\rightarrow
se, e somente se	\leftrightarrow

Tabela 1.1: Os cinco conectivos lógicos.

1.2.1 Tabelas Verdade

Ainda não terminamos de configurar o nosso sistema formal de lógica porque não fomos específicos a respeito dos significados dos conectivos de lógica. E claro que os nomes de cada conectivo sugerem como eles devem ser usados, mas, a fim de elaborar sentenças matematicamente precisas, precisamos saber exatamente o que cada conectivo significa.

Definir o significado de um símbolo matemático é mais difícil do que pode parecer. Até mesmo o símbolo + de aritmética ordinária é problemático. Embora todos nós tenhamos um entendimento intuitivo de adição — ela descreve como combinar duas quantidades —, é difícil expressar esse conceito em palavras sem ter que apelar para a nossa intuição. O que “combinar” significa, exatamente? O que são “quantidades”, na verdade? Um jeito simples, mas obviamente não prático, de definir o sinal de + seria listar todos os problemas possíveis de adição, como na Tabela 1.2. E claro que uma tabela como essa não teria fim, mas nos daria, em teoria, uma definição precisa do sinal de +.

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	2
2	1	3
\vdots	\vdots	\vdots

Tabela 1.2: Definir o sinal de + listando todos os problemas possíveis de adição requereria uma tabela infinita.

É mais fácil lidar com a situação em lógica. Qualquer sentença tem dois valores possíveis: verdadeiro (V) ou falso (F). Então, quando usamos variáveis como p ou q para uma sentença lógica, podemos considerá-los incógnitas que podem ter um dos dois valores: V ou F. Isso torna possível definir o significado de cada conectivo usando tabelas; em vez de termos infinitos possíveis valores para os números x e y , temos somente duas escolhas para cada variável p e q .

Agora, vamos estipular o significado de cada conectivo lógico listando os valores V/F para cada caso possível. O conectivo “não” é o exemplo mais simples, — Se p é verdadeira, então $\neg p$ deve ser falsa, e vice-versa.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Essa tabela de valores é chamada de *tabela verdade*; ela define os valores V/F para os conectivos. Os conectivos “e”, “ou”, “se, e somente se” e “implica” são definidos pelas seguintes tabelas verdades. Uma vez que temos duas variáveis, e cada uma pode ser tanto V como F, precisamos de quatro casos que são distribuídos nas quatro linhas de cada tabela.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A definição do conectivo “e”, indicado pelo sinal \wedge , é o que você deveria esperar: para que $p \wedge q$ sejam verdade, p deve ser verdade e q deve ser verdade. O conectivo “ou”, indicado pelo sinal \vee é um pouco menos óbvio. Note que a nossa definição estipula que $p \vee q$ é verdade sempre que p for verdade, ou q for verdade, ou ambos forem verdade. Isso pode ser diferente da forma como o “ou” é utilizado na linguagem cotidiana. Quando lhe oferecem “sopa ou salada” em um restaurante, o garçom não espera que você peça por “ambos”.

O conectivo “se e somente se” diz que duas sentenças têm exatamente os mesmos valores V/F. Dessa forma, $p \leftrightarrow q$ é verdade quando p e q coincidem em valor e será falsa caso isso não ocorra.

O conectivo “implica” tem a definição menos intuitiva. Para entendermos a motivação dessa definição, relembre o Exemplo 1.1. A fim de demonstrar que a sentença $p \rightarrow q \equiv$ ¹ “Se você está usando sapatos, então não pode cortar as unhas do pé.” é falsa, você deveria ser capaz de cortar as unhas do pé enquanto usasse sapatos. Em qualquer outra situação, você teria que admitir que a sentença não é falsa (e, se uma sentença não é falsa, ela deve ser verdadeira). Se você não está usando sapatos, então talvez consiga cortar as unhas do pé ou talvez não consiga por alguma outra razão. Isso não contradiz a sentença $p \rightarrow q$.

Dito de outra maneira, se você vive em um mundo sem sapatos, então a sentença é verdadeira por vacuidade: uma vez que você não pode nunca, de fato, usar sapatos, não é falso dizer que “Se você está

¹O símbolo \equiv representa equivalência em Lógica Formal. Ele é usado como um caso especial de igualdade.

usando sapatos,” então tudo é possível. Isso explica as duas últimas linhas da tabela verdade; se p é falsa, então $p \rightarrow q$ é verdade, não importa o que seja q .

1.3 Equivalências Lógicas

Definição 1.2

Duas sentenças são *logicamente equivalentes* se têm os mesmos valores V/F para todos os casos, ou seja, se elas têm as mesmas tabelas verdades.

Existem algumas equivalências lógicas que aparecem frequentemente em matemática, e também na vida em geral.

Exemplo 1.2

Considere o seguinte teorema de geometria do Ensino Médio:

Se um quadrilátero tem um par de lados paralelos, então ele tem um par de ângulos suplementares (ângulos cuja soma é 180°).



Esse teorema é da forma $p \rightarrow q$, em que p é a sentença de que o quadrilátero tem um par de lados paralelos, e q é a sentença de que o quadrilátero tem um par de ângulos suplementares.

Podemos ainda afirmar um teorema diferente, representado por $\neg q \rightarrow \neg p$:

Se o quadrilátero não tem um par de ângulos suplementares, então ele não tem um par de lados paralelos. Sabemos que esse segundo teorema é logicamente equivalente ao primeiro porque a sentença formal $p \rightarrow q$ é logicamente equivalente à sentença formal $\neg q \rightarrow \neg p$, como mostra a seguinte tabela verdade:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Note que a coluna $p \rightarrow q$ é igual à coluna $\neg q \rightarrow \neg p$. Uma vez que o primeiro teorema é um teorema de geometria verdadeiro, concluímos que o segundo também é.

Agora considere a seguinte variação para esse teorema:

Se um quadrilátero tem um par de ângulos suplementares, então ele tem um par de lados paralelos.

Essa sentença é da forma $q \rightarrow p$. Mas a tabela verdade a seguir mostra que $q \rightarrow p$ não é logicamente equivalente a $p \rightarrow q$, porque os valores V/F são diferentes na segunda e terceira linhas.

q	p	$q \rightarrow p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

De fato, essa última sentença geralmente não é verdadeira em geometria. (Você consegue desenhar um exemplo de um quadrilátero para o qual essa sentença não seja verdadeira?)

A sentença $\neg q \rightarrow \neg p$ é chamada de **contrapositiva** de $p \rightarrow q$, e a sentença $q \rightarrow p$ é chamada de **recíproca**. A tabela verdade anterior nos prova que, para qualquer sentença s , a contrapositiva de s é logicamente equivalente a s , enquanto a recíproca de s pode não ser logicamente equivalente.

Existem muitas situações em que assumir a recíproca pode causar problemas. Por exemplo, suponha que a seguinte sentença seja verdadeira:

Se uma empresa não participa de práticas ilegais de contabilidade, então uma auditoria não encontrará evidências de irregularidades.

É certamente razoável assumir isso: não pode haver evidências de irregularidades uma vez que não existem irregularidades. No entanto, é provável que a recíproca não seja verdadeira:

Se uma auditoria não encontra nenhuma evidência de irregularidades, então a empresa não participa de práticas ilegais de contabilidade.

Afinal de contas, é possível que os auditores tenham cometido erros.

Nesse momento, você poderia alegar que o uso de lógica formal parece muito complicado para apenas verificar deduções como esse último exemplo. Esse tipo de coisa é apenas senso comum, certo? Bem, talvez. Mas algo que parece óbvio para você pode não ser óbvio para outra pessoa. Além disso, nosso sistema de lógica formal irá lidar com situações mais complicadas, em que o nosso senso comum costuma falhar. A solução para o próximo exemplo usa lógica formal. Antes que você veja a solução, tente resolver o problema usando o “senso comum”. Embora a abordagem formal leve um pouco mais de tempo, ela resolve qualquer dúvida que você tenha sobre o seu próprio processo de raciocínio.

Exemplo 1.3

Se Alcides está atrasado, então Belmiro está atrasado, e, se Alcides e Belmiro estão ambos atrasados, então a aula é chata. Suponha que a aula não seja chata. O que você pode concluir a respeito de Alcides?

Solução: Vamos começar traduzindo a primeira frase em símbolos de lógica, usando as seguintes sentenças:

p = Alcides está atrasado.

q = Belmiro está atrasado.

r = A aula é chata.

Seja S a sentença “Se Alcides está atrasado, então Belmiro está atrasado, e, se Alcides e Belmiro estão ambos atrasados, então a aula é chata.” Em símbolos, S é traduzida como:

$$S = (p \rightarrow q) \wedge [(p \wedge q) \rightarrow r]$$

Agora vamos construir uma tabela verdade para S . Fazemos isso construindo tabelas verdade para as diferentes partes de S , começando com as de dentro dos parênteses e resolvendo do jeito que já conhecemos.

	p	q	r	$p \rightarrow q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	S
1.	V	V	V	V	V	V	V
2.	V	V	F	V	V	F	F
3.	V	F	V	F	F	V	F
4.	V	F	F	F	F	V	F
5.	F	V	V	V	F	V	V
6.	F	V	F	V	F	V	V
7.	F	F	V	V	F	V	V
8.	F	F	F	V	F	V	V

Verifique que a última coluna é o resultado de “e-zar” a coluna de $p \rightarrow q$ com a coluna $(p \wedge q) \rightarrow r$. Estamos interessados nos possíveis valores de p . Sabemos que S é verdadeira, logo podemos eliminar as linhas 2, 3 e 4, as linhas em que S é falsa. Se também assumirmos que a aula não é chata, então poderemos eliminar as linhas em que r é verdadeira, isto é, as linhas numeradas com números ímpares. As linhas que sobraram são as únicas com possíveis valores V/F para p , q , e r , ou seja, as linhas 6 e 8. Em ambas as linhas, p é falsa. Em outras palavras, Alcides não está atrasado.

1.3.1 Exercícios propostos

1 Sejam dadas as seguintes sentenças:

p = “Tem água nos cilindros.”

q = “A junta do cabeçote está vazando.”

r = “O carro vai pegar.”

a) Traduza a sentença seguinte para símbolos de lógica formal.

“Se a junta do cabeçote está vazando e tem água no cilindro, então o carro não vai pegar.”

b) Traduza a seguinte sentença formal para o português comum:

$$r \rightarrow \neg(q \vee p)$$

2 Seja s a sentença seguinte:

“Se você está estudando muito, então está ficando acordado até tarde da noite.”

a) Dê a recíproca de s .

b) Dê a contrapositiva de s .

3 Dizemos que dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais quando $a = c$ e $b = d$. Seja s a sentença seguinte.

Se $(a, b) = (c, d)$, então $a = c$.

a) Esta sentença é verdadeira?

b) Escreva a recíproca de s .

c) A recíproca de s é verdadeira? Explique.

4 Use a tabela verdade para provar que a sentença

$$[(p \vee q) \wedge (\neg p)] \rightarrow q$$

é sempre verdadeira, independentemente do que sejam p e q .

5 Sejam dadas as seguintes sentenças:

p = “Amauri está com fome.”

q = “A geladeira está vazia.”

r = “Amauri está zangado.”

a) Use os conectivos para traduzir a sentença seguinte para a lógica formal:

Se Amauri está com fome e a geladeira está vazia, então Amauri está zangado.

b) Construa a tabela verdade para a sentença em a).

c) Suponha que a sentença dada em a) seja verdadeira, e suponha também que Amauri não esteja zangado e a geladeira esteja vazia. Amauri está com fome? Justifique sua resposta usando a tabela verdade.

6 Geralmente podemos simplificar uma sentença complicada em lógica formal. Por exemplo, considere a sentença $S = (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.

a) Construa a tabela verdade para S .

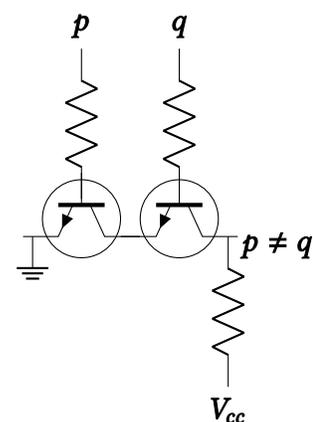
b) Ache uma expressão simplificada que seja logicamente equivalente a S .

7 O conectivo NAND é simbolizado por \uparrow e definido pela seguinte tabela verdade ao lado. Use tabelas verdade para mostrar que $p \uparrow q$ é logicamente equivalente a $\neg(p \wedge q)$.

p	q	$p \uparrow q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

(Isso explica o nome NAND = not AND, “não e” em português.)

8 O conectivo NAND é importante porque facilmente se constrói um circuito eletrônico que calcula o NAND de dois sinais (veja o esquema ao lado). Esse circuito é chamado de *porta lógica*. Além do mais, é possível construir portas lógicas para outros conectivos lógicos usando apenas portas NAND. Prove esse fato mostrando, através de tabelas verdade, as equivalências seguintes:



a) $(p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$ é logicamente equivalente a $p \wedge q$.

b) $(p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$ é logicamente equivalente a $p \vee q$.

c) $p \uparrow (q \uparrow q)$ é logicamente equivalente a $p \rightarrow q$.

1.4 Lógica Proposicional

Depois de ter trabalhado nos exercícios da seção anterior, você deve ter notado uma séria limitação no uso de tabelas verdade. Cada vez que você adiciona uma sentença na tabela verdade, você deve dobrar o número de linhas. Isso torna a análise de tabelas verdade trabalhosa para todos os exemplos que não aqueles mais simples.

Nesta seção iremos desenvolver um sistema de regras para manipular fórmulas em lógica simbólica. Esse sistema, chamado de *cálculo proposicional*, irá nos permitir fazer deduções lógicas formalmente. Existem pelo menos três razões para que façamos isso:

- Esses métodos formais são úteis para analisar problemas complexos de lógica, especialmente quando o uso de tabelas verdade é pouco prático.
- Esses métodos formais são úteis para analisar As regras de dedução que iremos estudar são comumente usadas na discussão matemática.
- O sistema de regras de dedução e sequências de demonstração é um exemplo simples de demonstração matemática.

Dessas três, a última é a mais importante. O processo de escrever sequências de demonstração em cálculo proposicional serve, dentre outras coisas, para análise de algoritmos em outras áreas da matemática.

Existem algumas sentenças em lógica formal que são sempre verdadeiras, não importam quais sejam os valores V/F das sentenças componentes. Por exemplo, a tabela verdade para $(p \wedge q) \rightarrow p$ é a seguinte:

Uma sentença como essa é chamada de **tautologia**, e escrevemos

$$(p \wedge q) \Rightarrow p$$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

para indicar esse fato. A notação $A \Rightarrow B$ significa que a sentença $A \Rightarrow B$ é verdadeira em todos os casos; em outras palavras, a tabela verdade para $A \Rightarrow B$ é composta apenas por Vs. Analogamente, o símbolo \Leftrightarrow denota a tautologia contendo o conectivo \leftrightarrow .

Quando a tautologia é da forma $(C \wedge D) \Rightarrow E$, é comum escrever $\left. \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} \right\} \Rightarrow E$ como alternativa. Essa notação destaca o fato de que, se você conhece tanto C quanto D , então você pode concluir E . O uso do conectivo \wedge é implícito.

Exemplo 1.4

Use a tabela verdade para provar $\left. \begin{matrix} p \\ p \rightarrow q \end{matrix} \right\} \Rightarrow q$.

Solução: Seja S a sentença $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$. Vamos construir a nossa tabela verdade determinando as partes de S e trabalhando de dentro para fora dos parênteses.

Uma vez que a coluna para S é toda composta de Vs, fica provado que S é uma tautologia.

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	S
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

A tautologia do Exemplo 1.4 é conhecida como *modus ponens*, o que em latim significa “modo afirmativo”. Esse conceito remonta aos filósofos estoicos da Grécia antiga, que afirmavam da seguinte forma:

Se o primeiro, então o segundo;
mas o primeiro;
portanto o segundo.

Um resultado relacionado usando negação é chamado *modus tollens* (“modo de negação”). Nos símbolos de lógica, essa tautologia se escreve da seguinte forma (perceba como é usada a contrapositiva):

$$\left. \begin{array}{l} \neg q \\ p \rightarrow q \end{array} \right\} \Rightarrow \neg p$$

Também existem as sentenças em lógica formal que nunca são verdadeiras. Uma sentença cuja tabela verdade é composta apenas por Fs é chamada de *contradição*.

Exemplo 1.5

Use uma tabela verdade para mostrar que $p \wedge \neg p$ é uma contradição.

Solução:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Em outras palavras, uma sentença e sua negação nunca podem ser ambas verdadeiras.

Uma sentença em lógica formal que não é uma tautologia nem uma contradição é chamada de *contingência*. Uma contingência tem tanto Vs quanto Fs em sua tabela verdade, assim sua verdade é “contingente” nos valores V/F de suas sentenças componentes. Por exemplo, $p \wedge q$, $p \vee q$ e $p \rightarrow q$ são todas contingências.

1.5 Regras de Dedução

Tautologias são importantes porque mostram como uma sentença pode ser logicamente deduzida de outra. Por exemplo, suponha que saibamos que as sentenças seguintes são verdadeiras:

Nosso professor não é dono de uma espaçonave.

Se o nosso professor é de Marte, então nosso professor é dono de uma espaçonave.

Podemos aplicar a tautologia *modus tollens* para deduzir que “Nosso professor não é de Marte”. Esse é um argumento válido, ou dedução, que nos permite concluir essa última sentença dadas as duas primeiras.

Toda tautologia pode ser usada como uma regra que justifica a dedução de uma nova sentença a partir de uma antiga. Existem dois tipos de regras de dedução: *regras de equivalência* e *regras de inferência*.

Regras de equivalência descrevem equivalências lógicas, enquanto regras de inferência descrevem quando uma sentença mais fraca pode ser deduzida de uma sentença mais forte. As regras de equivalência dadas na Tabela 1.3 podem ser verificadas usando tabelas verdade, onde representamos qualquer contradição por F e qualquer tautologia por V. Se A e B são sentenças (possivelmente compostas de muitas outras sentenças unidas por conectivos), então a tautologia $A \Leftrightarrow B$ é uma outra forma de dizer que A e B são logicamente equivalentes.

Uma regra de equivalência da forma $A \Leftrightarrow B$ pode fazer três coisas:

- ① Dado A, deduz-se B.
- ② Dado B, deduz-se A.

Equivalência	Nome
$p \Leftrightarrow \neg \neg p$	dupla negação
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	implicação
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	leis de De Morgan
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	comutatividade
$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	associatividade
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	distributividade
$p \vee F \Leftrightarrow p$ $p \wedge V \Leftrightarrow p$	propriedade da identidade

Tabela 1.3: Regras de Equivalência

- ③ Dada uma sentença contendo a sentença A , deduz-se a mesma sentença, mas com a sentença A substituída pela sentença B .

A terceira opção é uma forma de substituição. Por exemplo, dada a seguinte sentença:

Se Melinda não está doente e Melinda não está cansada, então Melinda pode brincar.

podemos deduzir o seguinte usando as leis de De Morgan:

Se não for o caso de Melinda estar doente ou cansada, então Melinda pode brincar.

Além das regras de equivalência, existem também regras de inferência para lógica proposicional. Diferentemente das regras de equivalência, as regras de inferência funcionam somente em uma direção. Uma regra de inferência da forma $A \Rightarrow B$ permite que se faça somente uma coisa:

- ① Dado A , deduza B .

Em outras palavras, você pode concluir uma sentença mais fraca, B , se já estabeleceu uma sentença mais forte, A . Por exemplo, *modus tollens* é uma regra de inferência: a sentença mais fraca

$B =$ “Nosso professor não é de Marte”.

resulta de uma sentença mais forte

$A =$ “Nosso professor não é dono de uma espaçonave, e se o nosso professor é de Marte, então ele é dono de uma espaçonave.”

Se A é verdadeira, então B deve ser verdadeira, mas não vice-versa. (Nosso professor pode ser dono de uma espaçonave e ser de Júpiter, por exemplo.) A Tabela 1.4 lista algumas regras úteis de inferência, todas as quais podem ser verificadas usando tabelas verdade.

Inferência	Nome
$\left. \begin{array}{l} p \\ q \end{array} \right\} \Rightarrow p \wedge q$	conjunção
R $\left. \begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \end{array} \right\} \Rightarrow q$	<i>modus ponens</i>
$\left. \begin{array}{l} \neg q \\ p \rightarrow q \end{array} \right\} \Rightarrow \neg p$	<i>modus tollens</i>
$p \wedge q \Rightarrow p$	simplificação
$p \Rightarrow p \vee q$	adição

Tabela 1.4: Regras de Inferência

1.5.1 Sequências de Prova

Agora temos ferramentas suficientes para deduzir novas tautologias das já conhecidas. Uma *sequência de prova* (ou *sequência de demonstração*) é uma sequência de sentenças e razões para justificar uma asserção da forma $A \Rightarrow C$. A primeira sentença, A , é dada. A sequência de prova pode então listar sentenças B_1, B_2, B_3 , etc., desde que cada nova sentença possa ser deduzida de uma ou mais sentenças prévias usando alguma regra de dedução. E claro que essa sequência de sentenças deve culminar em C , a sentença que estamos tentando provar a partir de A .

Exemplo 1.6

Escreva uma sequência de prova

para a asserção $\left. \begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array} \right\} \Rightarrow r$.

Solução:

Sentença	Razões
1. p	dada
2. $p \rightarrow q$	dada
3. $q \rightarrow r$	dada
4. q	<i>modus ponens</i> , 1, 2
5. r	<i>modus ponens</i> , 4, 3

Toda vez que provamos alguma coisa, temos uma nova regra de inferência. As regras na Tabela 1.4 são suficientes para começarmos, mas deveríamos nos sentir livres para usar as asserções já provadas

em provas futuras. Por exemplo, a asserção provada no Exemplo 1.6 ilustra a propriedade transitiva do conectivo \rightarrow .

Uma outra coisa a ser notada no Exemplo 1.6 é que ele foi bastante fácil — só tivemos que aplicar o *modus ponens* duas vezes. Compare isso com a abordagem da tabela verdade: a tabela verdade para $[p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$ consistiria em oito linhas e várias colunas. Tabelas verdade são mais fáceis de ser feitas, mas também podem ser muito mais tediosas.

Sequências de prova devem lembrar os tipos de prova que você costumava fazer na geometria no ensino médio. As regras são simples: comece com o que é dado, veja o que você consegue deduzir, finalize com o que você está tentando provar. Aqui está um exemplo mais difícil:

Exemplo 1.7

Prove $\left. \begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \end{array} \right\} \Rightarrow q$.

Solução:

Sentença	Razões
1. $p \vee q$	dada
2. $\neg p$	dada
3. $\neg(\neg p) \vee q$	dupla negação, 1
4. $\neg p \rightarrow q$	implicação, 3
5. q	<i>modus ponens</i> , 4, 2

Note que na etapa 3 dessa prova, usamos uma das regras de equivalência (dupla negação) para fazer a substituição na fórmula. Isso é permitido: uma vez que $\neg(\neg p)$ é logicamente equivalente a p , ele pode tomar o lugar de p em qualquer fórmula.

1.5.2 Exercícios propostos

1 Complete a coluna das razões na sequência de prova seguinte. Certifique-se de indicar a que etapa(s) cada regra de dedução se refere.

Sentença	Razões
1. $p \wedge (q \vee r)$	dada
2. $\neg(p \wedge q)$	dada
3. $\neg p \vee \neg q$	
4. $\neg q \vee \neg p$	
5. $q \rightarrow \neg p$	
6. p	
7. $\neg(\neg p)$	
8. $\neg q$	
9. $q \vee r$	
10. $r \vee q$	
11. $\neg(\neg r) \vee q$	
12. $\neg r \rightarrow q$	
13. $\neg(\neg r)$	
14. r	
15. $p \wedge r$	

2 Justifique cada conclusão com uma regra de dedução.

- Quem é artístico deve ser também criativo. Joselino não é criativo. Portanto, Joselino não é artístico.
- Leonídio é atlético e também inteligente. Portanto, Leonídio é atlético.
- Quem tem 18 anos de idade pode votar. Mafalda tem 18 anos de idade. Portanto, Mafalda pode votar.

3 Escreva uma sequência de prova para a seguinte

asserção $\left. \begin{array}{l} p \\ p \rightarrow r \\ q \rightarrow \neg r \end{array} \right\} \Rightarrow \neg q$. Justifique cada etapa.

4 Escreva uma sequência de prova para a seguinte

asserção $\left. \begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \wedge r \end{array} \right\} \Rightarrow q \wedge r$. Justifique cada etapa.

1.6 Lógica de Predicados

Quando definimos o que é uma sentença, dissemos que a frase da forma

$$x \text{ é par}$$

não é uma sentença, porque seus valores V / F dependem de x . A escrita matemática, no entanto, quase sempre lida com frases desse tipo; frequentemente expressamos ideias matemáticas em termos de uma variável desconhecida. Esta seção explica como estender nosso sistema formal de lógica para lidar com essas situações.

Definição 1.3: Predicado

Um *predicado* é uma frase declarativa cujos valores V/F dependem de uma ou mais variáveis.

Em outras palavras, um predicado é uma frase declarativa com variáveis que, após terem recebido valores específicos, transformam a frase em uma sentença.

Usamos a notação de função para denotar predicados. Por exemplo,

$$P(x) = \text{“}x \text{ é par”} \quad e$$

$$Q(x, y) = \text{“}x \text{ é mais pesado que } y\text{”}$$

são predicados. A sentença $P(8)$ é verdadeira, enquanto a sentença $Q(\textit{pena}, \textit{tijolo})$ é falsa.

Implícito em um predicado está o *domínio* (ou universo) de valores que a variável ou as variáveis podem assumir. Para $P(x)$, o domínio poderia ser de números inteiros; para $Q(x, y)$, o domínio poderia ser alguma coleção de objetos físicos. Em geral, vamos declarar o domínio juntamente com o predicado, a menos que já esteja claro pelo contexto.

Equações são predicados. Por exemplo, se $E(x)$ representa a equação

$$x^2 - x - 6 = 0,$$

então $E(3)$ é verdadeira e $E(4)$ é falsa. Consideramos equações como frases declarativas, em que o sinal = faz o papel de um verbo.

Sozinhos, os predicados não são sentenças porque contêm variáveis livres. Podemos transformá-los em sentenças substituindo as variáveis por valores específicos do domínio; porém muitas vezes queremos obter uma sentença sem usar valores específicos.

Definição 1.4: Quantificador

Um *quantificador* modifica um predicado ao descrever se alguns ou todos os elementos do domínio satisfazem o predicado.

Vamos precisar somente de dois quantificadores: universal e existencial. O *quantificador universal* “para todo” é denotado por \forall . Então a sentença

$$(\forall x)P(x)$$

diz que $P(x)$ é verdadeira para todo x que está no domínio.

O *quantificador existencial* “existe” é denotado por \exists . A sentença

$$(\exists x)P(x)$$

diz que existe um elemento x do domínio tal que $P(x)$ é verdadeira; em outras palavras, $P(x)$ é verdadeira para *pelo menos um valor de x no domínio*. Por exemplo, se $E(x)$ é a equação $x^2 - x - 6 = 0$ no domínio dos números reais, então a expressão

$$(\exists x)E(x)$$

diz: “Existe algum número real x tal que $x^2 - x - 6 = 0$ ”, ou de maneira mais simples, “A equação $x^2 - x - 6 = 0$ tem uma solução”. A variável x não é mais uma variável livre, uma vez que o quantificador \exists muda o papel que ele desempenha na sentença.

Se $Z(x)$ representa a equação $x \cdot 0 = 0$ nos números reais, a expressão

$$(\forall x)Z(x)$$

significa “Para todos os números reais x , vale que $x \cdot 0 = 0$ ”. Novamente, essa é uma sentença sem variáveis livres, uma vez que o alcance de valores possíveis de x é claramente especificado.

Quando colocamos um quantificador em frente a um predicado, formamos uma *sentença quantificada*. Uma vez que o quantificador restringe o alcance de valores para as variáveis no predicado, a sentença quantificada é ou verdadeira ou falsa (mas não ambas). Nos exemplos anteriores, $(\exists x)E(x)$ e $(\forall x)Z(x)$ são ambas verdadeiras, enquanto a sentença

$$(\forall x)E(x)$$

é falsa, uma vez que alguns números reais não satisfazem a equação $x^2 - x - 6 = 0$.

O real poder da lógica de predicados vem de combinar quantificadores, predicados e os símbolos de lógica proposicional. Por exemplo, se quiséssemos afirmar que existe um número negativo que satisfaz a equação $x^2 - x - 6 = 0$, poderíamos definir um novo predicado

$$N(x) = \text{“}x \text{ é negativo”}.$$

Então a sentença

$$(\exists x)(N(x) \wedge E(x))$$

é traduzida para “Existe algum número real x tal que x é negativo e $x^2 - x - 6 = 0$ ”.

Existem muitas formas diferentes de escrever sentenças quantificadas em português. Traduzir sentenças de uma forma para a outra, entre o português e a lógica de predicados, é uma habilidade que requer prática.

Exemplo 1.8

No domínio de todos os carros, sejam os predicados:

$$P(x) = \text{“}x \text{ consome pouco combustível.”}$$

$$Q(x) = x \text{ é grande.}$$

então a sentença $(\forall x)(Q(x) \rightarrow \neg P(x))$ poderia ser literalmente traduzida para “Para todos os carros x , se x é grande, então x não consome pouco combustível.”

No entanto, uma tradução mais natural da mesma sentença é

“Todo carro grande consome muito combustível.” ou

“Não existem carros grandes que consumam pouco combustível.”

Se quiséssemos dizer o oposto, ou seja, que existem alguns carros grandes que consomem pouco combustível, poderíamos escrever a seguinte sentença:

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$$

Daremos uma demonstração formal de que essa negação é correta no Exemplo 1.11.

O exemplo seguinte mostra como uma sentença matemática aparentemente simples rende uma fórmula um tanto complicada em lógica de predicados. O uso cuidadoso de predicados ajuda a revelar a estrutura lógica de uma afirmação matemática.

Exemplo 1.9

No domínio de todos os números inteiros, seja $P(x) = "x \text{ é par}"$. A seguir, veja como podemos expressar o fato de que a soma de um número par com um número ímpar é ímpar:

$$(\forall x)(\forall y)[(P(x) \wedge \neg P(y)) \rightarrow (\neg P(x + y))]$$

É claro que a tradução literal dessa sentença quantificada é

“Para todo número inteiro x e para todo número inteiro y , se x é par e y não é par, então $x + y$ não é par”, mas normalmente dizemos algo informal como

“Um número par mais um número ímpar é ímpar”.

Esse último exemplo usou dois quantificadores universais para expressar um fato sobre um par arbitrário x, y de números inteiros. O próximo exemplo mostra o que pode acontecer quando combinamos quantificadores universal e existencial na mesma sentença.

Exemplo 1.10

No domínio de todos os números reais, seja $G(x, y)$ o predicado “ $x > y$ ”. A sentença

$$(\forall y)(\exists x)G(x, y)$$

diz literalmente que “Para todos os números y , existe algum número x tal que $x > y$ ”, ou, mais simples ainda, “Dado qualquer número y , existe algum número que é maior que y ”.

Essa sentença é claramente verdadeira: o número $y + 1$ é sempre maior que y , por exemplo.

No entanto, a sentença

$$(\exists x)(\forall y)G(x, y)$$

é traduzida literalmente como “Existe um número x tal que para todos os números y temos $x > y$ ”.

Em linguagem mais simples, essa sentença diz: “Existe algum número que é maior do que qualquer outro número.” Essa sentença é claramente falsa, porque não existe um número maior que todos os outros.

A ordem dos quantificadores importa. Em ambas as sentenças, é feita uma afirmação de que x é maior que y . Na primeira sentença, primeiramente lhe é dado um número arbitrário y , e então a afirmação é que é possível achar algum x que seja maior que ele. No entanto, a segunda sentença afirma existir algum número x tal que, dado qualquer outro y , o maior dos dois será x . Na segunda sentença, você deve decidir o que é x antes de escolher y . Na primeira sentença, você escolhe y antes para em seguida escolher x .

A coisa mais importante que você precisa ser capaz de fazer com lógica de predicados é escrever a negação de uma sentença quantificada. Como em lógica proposicional, existem algumas equivalências formais que descrevem como a negação funciona.

A Tabela abaixo lista duas regras importantes para formar o oposto de uma sentença quantificada.

Equivalência	Nome
$\neg[(\forall x)P(x)] \iff (\exists x)(\neg P(x))$	negação universal
$\neg[(\exists x)P(x)] \iff (\forall x)(\neg P(x))$	negação existencial

É fácil ver o padrão formal dessas duas regras: para negar uma sentença quantificada, traga a negação para dentro do quantificador e troque o quantificador.

Vamos interpretar as regras de negação no contexto de um exemplo. No domínio de todas as pessoas, seja $L(x)$ o predicado “ x é um mentiroso”. A regra universal de negação diz que a negação para “Todas as pessoas são mentirosas” é “Existe uma pessoa que não é mentirosa”. Em símbolos,

$$\neg[(\forall x)L(x)] \leftrightarrow (\exists x)(\neg L(x)).$$

Similarmente, a regra de negação existencial diz que a negação de “Existe um mentiroso” é “Não existem mentirosos”.

Exemplo 1.11

No Exemplo 1.8, discutimos o que a negação da sentença “Todo carro grande consome muito combustível.” deveria ser.

Podemos responder a essa questão negando a sentença formal $(\forall x)(Q(x) \rightarrow \neg P(x))$ usando uma sequência de equivalências de prova.

Vamos supor como dada a negação da sentença formal e deduzir uma sentença equivalente.

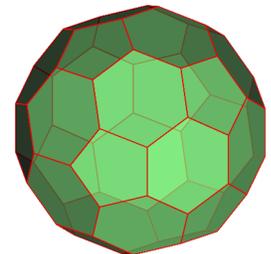
$$\begin{array}{lll} \neg[(\forall x)(Q(x) \rightarrow \neg P(x))] & & \text{(sequência dada)} \\ \iff (\exists x)\neg(Q(x) \rightarrow \neg P(x)) & & \text{(negação universal)} \\ \iff (\exists x)\neg(\neg Q(x) \vee \neg P(x)) & & \text{(implicação)} \\ \iff (\exists x)(\neg(\neg Q(x)) \wedge \neg(\neg P(x))) & & \text{(lei de De Morgan)} \\ \iff (\exists x)(Q(x) \wedge P(x)) & & \text{(dupla negação)} \\ \iff (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) & & \text{(comutatividade)} \end{array}$$

Note que o resultado concorda com a negação intuitiva que fizemos no Exemplo 1.8: existe algum carro que é grande e que consome pouco combustível.

Considere o domínio constituído pelas faces do icosaedro truncado (também conhecido como bola de futebol):

Agora considere os predicados seguintes:

$$\begin{aligned} P(x) &= \text{“}x \text{ é um pentágono”}. \\ H(x) &= \text{“}x \text{ é um hexágono”}. \\ B(x, y) &= \text{“}x \text{ faz fronteira com } y \text{”}. \end{aligned}$$



Aqui dizemos que dois polígonos fazem fronteira um com o outro se eles compartilham uma aresta.

Questão 1: resolvida

Confirme que as observações seguintes são verdadeiras para qualquer icosaedro truncado:

- Dois pentágonos nunca fazem fronteira um com o outro.
- Todo pentágono faz fronteira com algum hexágono.
- Todo hexágono faz fronteira com um outro hexágono.

Escreva essas sentenças em lógica de predicados e também as suas negações. Simplifique as sentenças negadas de modo que nenhum predicado permaneça dentro do escopo de uma negação. Traduza a sua sentença negada de volta para o português.

Solução: A formalização dessas sentenças se dá da seguinte forma.

$$\textcircled{1} (\forall x)(\forall y)((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow \neg B(x, y))$$

$$\textcircled{2} (\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(H(y) \wedge B(x, y)))$$

$$\textcircled{3} (\forall x)(H(x) \rightarrow (\exists y)(H(y) \wedge B(x, y)))$$

Vamos negar $\textcircled{2}$ e deixar as outras como exercício. Veja se você consegue descobrir as razões para cada equivalência.

$$\begin{aligned} & \neg[(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(H(y) \wedge B(x, y)))] && \text{(sequência dada)} \\ \iff & (\exists x)[\neg(P(x) \rightarrow (\exists y)(H(y) \wedge B(x, y)))] \\ \iff & (\exists x)[\neg(\neg P(x) \vee (\exists y)(H(y) \wedge B(x, y)))] \\ \iff & (\exists x)[\neg\neg(P(x) \wedge \neg(\exists y)(H(y) \wedge B(x, y)))] \\ \iff & (\exists x)[\neg\neg(P(x) \wedge (\forall y)\neg(H(y) \wedge B(x, y)))] \\ \iff & (\exists x)[(P(x) \wedge (\forall y)\neg(H(y) \wedge B(x, y)))] \\ \iff & (\exists x)[(P(x) \wedge (\forall y)(\neg H(y) \vee \neg B(x, y)))] \\ \iff & (\exists x)[(P(x) \wedge (\forall y)(H(y) \rightarrow \neg B(x, y)))] \end{aligned}$$

Essa última sentença diz que existe um x tal que x é um pentágono e, para qualquer y , se y é um hexágono, então x não faz fronteira com y . Em outras palavras, existe algum pentágono que não faz fronteira com hexágonos. Se você descobriu um sólido com essa propriedade, ele não poderia ser um icosaedro truncado.

Existem duas expressões que aparecem com frequência, e conhecer a lógica de predicados para essas expressões torna a tradução muito mais fácil. A primeira sentença é

Todo \langle alguma coisa \rangle é \langle alguma outra coisa \rangle .

Por exemplo, “Todos os jogadores de beisebol são ricos”, ou “Todas as ovelhas são brancas”. Em geral, se $P(x)$ e $Q(x)$ são os predicados “ x é \langle alguma coisa \rangle ” e “ x é \langle alguma outra coisa \rangle ” respectivamente, então a expressão de lógica de predicados

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

é traduzida como “Para todo x , se x é \langle alguma coisa \rangle , então x é \langle alguma outra coisa \rangle ”. Dito de forma mais simples, “Todos os x 's com a propriedade \langle alguma coisa \rangle devem ter a propriedade \langle alguma outra coisa \rangle ”, ou mais simples ainda, “Todo \langle alguma coisa \rangle é \langle alguma outra coisa \rangle ”.

No domínio de todas as pessoas, se $R(x)$ representa “ x é rico” e $B(x)$ representa “ x é jogador de beisebol”, então

$$(\forall x)(B(x) \rightarrow R(x))$$

é a sentença “Todos os jogadores de beisebol são ricos”.

A segunda construção é da forma

Existe um \langle alguma coisa \rangle que é \langle alguma outra coisa \rangle .

Por exemplo, “Existe um jogador de beisebol rico”, ou “Existe uma ovelha branca”. Essa expressão tem a seguinte forma em lógica de predicados:

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$$

Note que isso se traduz literalmente como “Existe algum x tal que x é <alguma coisa> e x é <alguma outra coisa>”, que é o que queremos.

No domínio dos mamíferos, se $O(x)$ é o predicado “ x é uma ovelha” e $F(x)$ é o predicado “ x é branca”, então

$$(\exists x)(F(x) \wedge O(x))$$

seria traduzida para “Existe uma ovelha branca”.

Nota:

Você também poderia dizer “Existe uma ovelha de cor branca”, “Algumas ovelhas são brancas”, ou, até de uma forma mais esquisita, “Existe um mamífero branco que é uma ovelha”. Todas essas sentenças significam a mesma coisa.

1.6.1 Exercícios propostos

1 No domínio dos números inteiros, seja $P(x, y)$ o predicado “ $x \cdot y = 12$ ”. Diga se cada uma das sentenças a seguir é verdadeira ou falsa:

- a) $P(3, 4)$
- b) $P(3, 5)$
- c) $P(2, 6) \vee P(3, 7)$
- d) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x))$
- e) $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$

2 No domínio de todos os livros, considere os predicados seguintes:

$$H(x) = \text{“}x \text{ é pesado”}.$$

$$C(x) = \text{“}x \text{ é confuso”}.$$

Traduza as sentenças seguintes de lógica de predicados para o português cotidiano:

- a) $(\forall x)(H(x) \rightarrow C(x))$
- b) $(\exists x)(C(x) \wedge H(x))$
- c) $(\forall x)(C(x) \vee H(x))$
- d) $(\exists x)(H(x) \wedge \neg C(x))$

3 Considere os seguintes predicados no domínio de todas as plantas:

$$P(x) = \text{“}x \text{ é venenosa”}.$$

$$Q(x) = \text{“}x \text{ comeu Jacinto”}.$$

Traduza as sentenças seguintes para a lógica de predicados.

- a) Algumas plantas são venenosas.
- b) Jacinto nunca comeu uma planta venenosa.
- c) Existem algumas plantas não venenosas que Jacinto nunca comeu.

4 O domínio para este problema é uma coleção de números não especificados. Considere o predicado

$$P(x, y) = \text{“}x \text{ é maior que } y\text{”}.$$

- a) “Traduza a sentença a seguir usando a lógica de predicados.
Para todo número existe um outro maior que ele.”
- b) Negue a sua expressão da parte a) e simplifique-a de forma que não restem quantificadores dentro do escopo de uma negação.
- c) Traduza a sua expressão da parte b) para um português compreensível. Não use variáveis na sua tradução para o português.

5 Qualquer equação ou desigualdade com variáveis é um predicado no domínio dos números reais. Diga se cada uma das sentenças seguintes é verdadeira ou falsa:

- a) $(\forall x)(x^2 > x)$
- b) $(\exists x)(x^2 - 2 = 1)$
- c) $(\exists x)(x^2 + 2 = 1)$
- d) $(\forall x)(\exists y)(x^2 + y = 4)$
- e) $(\exists y)(\forall x)(x^2 + y = 4)$

1.7 Conectivos Lógicos no Mundo Real

Os programas de busca na Internet permitem a exploração de recursos imensos disponíveis, mas um pouco de cuidado na sua pesquisa pode ajudar a chegar ao resultado desejado mais rapidamente. Por exemplo, se pesquisar

carros usados

em um programa de busca, você pode obter de volta referências na rede de qualquer página contendo a palavra carros ou a palavra usados; isso poderia incluir antiquários e páginas contendo os últimos resultados das corridas. Se você escrever

“carros usados”

entre aspas, na maior parte dos programas de busca, isso restringiria a busca às páginas contendo exatamente essa frase. A maior parte dos programas de busca permite que você coloque uma expressão usando conectivos lógicos em sua pesquisa, o que ajuda a tornar a pesquisa ainda mais específica. Para diminuir ainda mais sua pesquisa sobre carros usados, você poderia colocar, por exemplo,

“carros usados” E (Ford OU Gurgel)

Isso tenderia a limitar sua pesquisa a lugares que mencionam marcas particulares de carros usados, embora, ainda assim, você possa terminar com um link para a Agência Pirata de Empréstimos Jaime Gurgel, que empresta dinheiro para comprar carros usados. A pesquisa

“carros usados” E (Ford OU Gurgel) E NÃO caminhões

eliminaría os lugares que mencionam caminhões. Muitos programas de busca usam + (um sinal de mais) no lugar de E (ou AND) e – (um sinal de menos) no lugar de E NÃO (ou AND NOT).

Os conectivos lógicos E (AND), OU (OR) e NÃO (NOT) também estão disponíveis em muitas linguagens de programação, assim como em calculadoras gráficas programáveis. Esses conectivos, de acordo com as tabelas verdade que definimos, agem em combinações de expressões verdadeiras ou falsas para produzir um valor lógico final. Tais valores lógicos fornecem a capacidade de decisão fundamental ao fluxo de controle em programas de computadores. Assim, em uma ramificação condicional de um programa, se o valor lógico da expressão condicional for verdadeiro, o programa executará a seguir um trecho de seu código; se o valor for falso, ele executará um trecho diferente de seu código. Se a expressão condicional for substituída por outra expressão equivalente mais simples, o valor lógico da expressão, e, portanto, o fluxo de controle do programa, não será afetado, mas o novo código será mais fácil de ser entendido e poderá ser executado mais rapidamente.

Exemplo 1.12

Considere uma proposição em um programa de computador da forma

- 1 se ((FluxoSaida > FluxoEntrada) e não ((FluxoSaida > FluxoEntrada) e (Pressão < 1000)))
então
- 2 | faça AlgumaCoisa;
- 3 senão
- 4 | faça OutraCoisa

É fácil ver que esse proposição condicional tem a forma $A \wedge \neg(A \wedge B)$ em que $A = \text{“FluxoDeSaída} > \text{FluxoDeEntrada”}$ e $B = \text{“Pressão} < 1000”$. Essa expressão pode ser simplificada substituindo-a por outra equivalente.

$$\begin{aligned}
 A \wedge \neg(A \wedge B) &\iff A \wedge (\neg A \vee \neg B) && \text{(lei de De Morgan)} \\
 &\iff (A \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg B) && \text{(distributividade)} \\
 &\iff F \vee (A \wedge \neg B) && \text{(contradição)} \\
 &\iff (A \wedge \neg B) && \text{(propriedade da identidade)}
 \end{aligned}$$

A proposição pode, então, ser escrita na forma

- 1 se ((FluxoSaida > FluxoEntrada) e não (Pressão < 1000)) então
- 2 | faça AlgumaCoisa;
- 3 senão
- 4 | faça OutraCoisa

Finalmente, as tabelas verdade para a conjunção, a disjunção e a negação são implementadas por dispositivos eletrônicos chamados “portas lógicas” (porta lógica E ou AND, porta lógica OU ou OR, inversor, respectivamente) como mostrado no Exercício 8 da Seção 1.3.1, que são os módulos fundamentais na construção dos circuitos nos computadores.

1.7.1 Algoritmos e Lógica de Programação

Para testar se uma proposição é uma tautologia, sempre podemos construir sua tabela verdade. Para n argumentos, precisaremos de 2^n linhas para a tabela verdade. Suponha, entretanto, que o conectivo principal é uma implicação, ou seja, que a proposição tem a forma $P \rightarrow Q$. Então, podemos usar um procedimento mais rápido do que construir uma tabela verdade para decidir se $P \rightarrow Q$ é, ou não, uma tautologia. Vamos supor que $P \rightarrow Q$ não é uma tautologia e ver se isso nos leva a uma situação impossível. Se esse for o caso, então a hipótese de que $P \rightarrow Q$ não é uma tautologia também é impossível, e $P \rightarrow Q$ vai ter que ser mesmo uma tautologia. Supor que $P \rightarrow Q$ não é uma tautologia é o mesmo que dizer que ela pode assumir o valor falso, e, pela tabela verdade para implicação, $P \rightarrow Q$ só é falsa quando P é verdadeira e Q é falsa. Designando os valores lógicos verdadeiro para P e falso para Q , determinamos os possíveis valores lógicos para as sentenças que constituem P e Q . Continuamos a atribuição de valores lógicos dessa forma até que todas as sentenças tenham um valor lógico. Se, por esse processo, forem atribuídos a alguma sentença os valores lógicos verdadeiro e falso ao mesmo tempo, teremos uma situação impossível, logo $P \rightarrow Q$ terá que ser uma tautologia. Caso contrário, encontraremos uma maneira de tornar a proposição atribuída falsa, e, portanto, ela não é uma tautologia.

O que descrevemos é um conjunto de instruções – um procedimento – para executar a tarefa de determinar se $P \rightarrow Q$ é, ou não, uma tautologia. Esse procedimento pode ser executado mecanicamente seguindo-se as instruções; em um tempo finito, teremos uma resposta. Em ciência da computação, tal procedimento é chamado um *algoritmo*.

Definição 1.5: algoritmo

Um *algoritmo* é um conjunto de instruções que podem ser executadas mecanicamente em um tempo finito de modo a resolver algum problema.

Algoritmos constituem o cerne da ciência da computação, e teremos mais a dizer sobre eles ao longo deste livro. Você, provavelmente, já sabe que a tarefa principal ao escrever um programa de computador para resolver um problema consiste em desenvolver um algoritmo para produzir a solução do problema.

Os algoritmos são, muitas vezes, descritos de maneira intermediária entre uma descrição puramente verbal em um parágrafo (como fizemos anteriormente para decidir se $P \rightarrow Q$ era uma tautologia) e um programa de computador (que, se fosse executado, realizaria, de fato, os passos do algoritmo) escrito em uma linguagem de programação.

Essa forma intermediária de escrever algoritmos é conhecida como **pseudocódigo**. Um algoritmo escrito em pseudocódigo não deve ser difícil de entender, mesmo se você não souber nada sobre programação de computadores. A única coisa a observar sobre o pseudocódigo utilizado neste livro é que linhas que começam com duas barras inclinadas (*//*) são comentários, não fazendo parte do algoritmo propriamente dito.

Abaixo vemos em pseudocódigo o algoritmo para determinar se $P \rightarrow Q$ é, ou não, uma tautologia.

Algoritmo TESTATAUTOLOGIA

```

// Dadas P e Q, decide se P → Q é, ou não, uma tautologia.
// Suponha que P → Q não é uma tautologia
1 P = verdadeira // atribui V a P
2 Q = falsa // atribui F a Q
3 repita
4   | para cada sentença composta à qual já tenha sido atribuída um valor lógico, atribua os
   |   valores lógicos determinados para cada uma de suas componentes
5 até todas as componentes da proposição terem valores lógicos
6 se alguma componente da proposição tiver dois valores lógicos diferentes
   // contradição, a hipótese é falsa
7 então
8   | escreva (“P → Q é uma tautologia.”)
9 senão
10  | escreva (“P → Q não é uma tautologia.”) // existe uma maneira de tornar
   |   P → Q falsa

```

O algoritmo atribui primeiro os valores lógicos “verdadeiro” a P e “falso” a Q , de acordo com a hipótese de que $P \rightarrow Q$ não é uma tautologia. O algoritmo, então, entra em um laço (ou ciclo), em que uma sequência de passos é repetida até que determinada condição seja satisfeita. Dentro do laço, atribuem-se valores lógicos às componentes cada vez menores das proposições originais P e Q até que todas as letras de proposição tenham valores lógicos associados. Então o algoritmo testa se ocorreu alguma contradição e escreve a informação sobre se $P \rightarrow Q$ é, ou não, uma tautologia.

Exemplo 1.13

Considere a proposição $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$. Essa proposição tem a forma necessária para se usar o algoritmo TestaTautologia, ou seja, é da forma $P \rightarrow Q$, em que P é $(A \rightarrow B)$ e Q é $(\neg B \rightarrow \neg A)$. Seguindo o algoritmo, atribuímos primeiro os valores lógicos $(A \rightarrow B)$ verdadeira e $(\neg B \rightarrow \neg A)$ falsa. Entrando no laço, a atribuição de falsa à proposição composta $(\neg B \rightarrow \neg A)$ determina outras atribuições, a saber,

$\neg B$ verdadeira e $\neg A$ falsa

ou

B falsa e A verdadeira.

Trabalhando agora com P , A verdadeira e $A \rightarrow B$ verdadeira determina a atribuição B verdadeira

(por *modus ponens*). Agora todas as letras de proposição têm valor lógico, ou seja:

$$\overbrace{(A \rightarrow B)}^V \rightarrow \overbrace{(\neg B \rightarrow \neg A)}^F$$

$A=V$ $B=V$ $B=F$ $A=V$

Isso encerra o laço. No último passo do algoritmo, B tem, ao mesmo tempo, os valores lógicos V e F , logo o algoritmo decide que $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ é uma tautologia. De fato, você pode construir uma tabela verdade e verificar isso (se tiver paciência).

O algoritmo TestaTautologia decide se uma proposição de determinada forma, ou seja, cujo conectivo principal é \rightarrow , é uma tautologia. No entanto, o processo de construção de uma tabela verdade, seguido do exame dos valores lógicos na última coluna, também constitui um algoritmo para decidir se uma proposição arbitrária é uma tautologia. Esse segundo algoritmo é mais poderoso, já que resolve um problema mais geral, mas o algoritmo TestaTautologia é, geralmente, mais rápido para aquelas proposições a que se aplica.

1.7.2 Exercícios propostos

1 Considere o seguinte pseudocódigo:

```

1 repita
2   i = 1 // primeiro valor x
3   leia o valor de x
4   se ((x < 5, 0) e (2x < 10, 7)) ou
   (√5x > 5, 1) então
5     escreva o valor de x
6   aumente i em 1 // próximo valor
7 até i > 5

```

Os valores de entrada são 1,0; 5,1; 2,4; 7,2 e 5,3. Quais são os valores de saída?

2 Reescreva o pseudocódigo a seguir com uma expressão condicional mais simples, em que a função *impar*(n) tem o valor lógico verdadeiro se n for ímpar.

```

1 se não ((Valor1 < Valor2) ou
   impar(Número))
2 ou não(Valor1 < Valor2) e
   impar(Número) então
3   proposição1
4 senão
5   proposição2

```

3 Você quer que seu programa execute a proposição1 quando A for falsa, B for falsa e C for verdadeira e que execute a proposição2 nos outros casos. Você escreveu:

```

1 se não (A e B) e C então
2   proposição1
3 senão
4   proposição2

```

Esse algoritmo faz o que você quer?

4 Use o algoritmo TestaTautologia para provar que as expressões a seguir são tautologias.

- $[\neg B \wedge (A \rightarrow B)] \rightarrow \neg A$
- $[(A \rightarrow B) \wedge A] \rightarrow B$
- $(A \vee B) \wedge \neg A \rightarrow B$

5 Um anúncio de um restaurante em um clube exclusivo em Honolulu diz

“Apenas sócios e não sócios”.

Dê duas interpretações possíveis para essa afirmação.

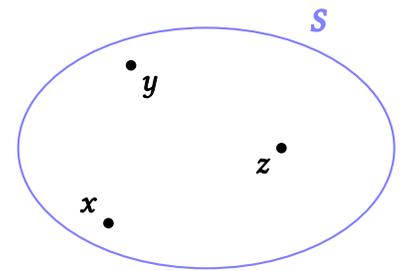
PENSAMENTO ESTRUTURAL

Acreditamos que o leitor já teve contato com os conceitos básicos da teoria dos conjuntos, como elemento, união, intersecção, etc.. Nesta seção vamos revisar esses conceitos. Embora seja possível desenvolver a teoria de conjuntos de maneira axiomática, como foi feito por George Cantor (1845–1918) e Ernest Zermelo (1871–1953), a abordagem informal apresentada é suficiente para nossos propósitos.

2.1 Conjuntos

A forma mais simples de descrever uma coleção de objetos relacionados é como um conjunto. Pense no conjunto S como um recipiente em que um objeto x é alguma coisa que S contém.

Escrevemos $x \in S$ para denotar que x está contido em S . Também dizemos que “ x é um membro de S ”, “ x é um elemento de S ”, ou, mais simplesmente ainda, “ x está em S ”. Se houver mais elementos, podemos escrever $x, y, z \in S$ para denotar que estes três elementos estão no mesmo conjunto como na figura ao lado.



Podemos descrever exemplos de conjuntos ao listar os elementos no conjunto ou descrever as propriedades que um elemento do conjunto possui. Para dizer que o conjunto S consiste nos elementos x_1, x_2, \dots, x_n , escrevemos

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Suponha que p seja uma propriedade que alguns dos elementos do conjunto S possuam. Podemos descrever o conjunto de todos os elementos de S que têm a propriedade p como

$$\{x \in S \mid x \text{ tem propriedade } p\}.$$

Algumas vezes essa notação é chamada de “construtor de conjuntos”, porque explica como construir uma lista de todos os elementos de um conjunto.

Exemplo 2.1

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Então $2 \in A$ e $9 \notin A$. Se

$$B = \{x \in A \mid x \text{ é ímpar}\},$$

então os elementos de B são 1, 3, 5, 7.

Exemplo 2.2

Existem alguns conjuntos mais comuns que recebem nomes específicos. O conjunto dos números inteiros é denotado por \mathbb{Z} , e o conjunto dos números inteiros positivos (ou números naturais) é escrito como \mathbb{N} . Note que $0 \in \mathbb{Z}$, mas $0 \notin \mathbb{N}$. Usamos \mathbb{R} para o conjunto de números reais e \mathbb{Q} para o conjunto de números racionais, ou seja, o conjunto de todas as frações $\frac{a}{b}$, em que a e b são números inteiros, e $b \neq 0$.

Exemplo 2.3

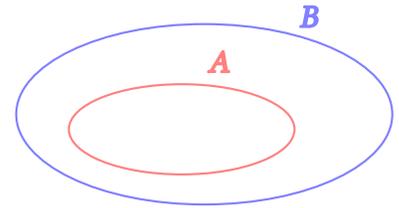
Seja P o conjunto de todos os polígonos. Então P contém todos os triângulos, quadrados, pentágonos, etc. Se c é um círculo, então $c \notin P$. Poderíamos descrever o conjunto H de todos os hexágonos em uma notação construtora de conjunto como

$$H = \{x \in P \mid x \text{ tem seis lados}\}.$$

A linguagem dos conjuntos é útil para descrever grupos de objetos que estão relacionados por alguma propriedade em comum. Muitas vezes uma propriedade implica outra; por exemplo, todos os números inteiros são números reais. Em termos de conjuntos, isso significa que o conjunto \mathbb{Z} está contido no conjunto \mathbb{R} . Em geral, a afirmação do predicado lógico de que

$$(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \tag{2.1}$$

é escrita como $A \subseteq B$, e dizemos que “ A está contido em B ”, ou “ A é um subconjunto de B ”, ou “ B contém A ”. Podemos expressar essa relação de forma pictórica usando o *diagrama de Venn* acima.

**Exemplo 2.4**

No Exemplo 2.1, $B \subseteq A$. Notamos que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ no Exemplo 2.2, e também poderíamos dizer que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, e $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Essa cadeia de relações também poderia ser escrita como

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.5

O conjunto vazio \emptyset é o conjunto que não contém elementos. Portanto, o conjunto vazio é um subconjunto de qualquer conjunto, ou seja, $\emptyset \subseteq X$ para todo X . Isso acontece porque a sentença $x \in \emptyset$ é falsa para todo x , de modo que a implicação

$$(\forall x)(x \in \emptyset \rightarrow x \in X)$$

deve ser verdadeira. (Lembre-se da tabela verdade para o conectivo “ \rightarrow ” ao final da Seção 1.2.1.)

2.1.1 Novos Conjuntos a Partir de Antigos

Os conjuntos descrevem relacionamentos, mas a linguagem dos conjuntos também pode descrever a lógica de como as coisas estão relacionadas. Já vimos um exemplo desses antes: a sentença 2.1 mostra como interpretar o símbolo \subseteq nos termos de uma sentença de predicado lógico contendo o conectivo \rightarrow ; a relação de inclusão tem a lógica de uma implicação. Os conectivos \vee , \wedge , \neg e \leftrightarrow também têm suas representações na teoria dos conjuntos.

A *união* $A \cup B$ de dois conjuntos A e B é o conjunto que contém todos os elementos de A e B juntos. Um elemento pertence à união de dois conjuntos A e B se o elemento está em A , ou em B , ou em ambos. Na notação de construção dos conjuntos,

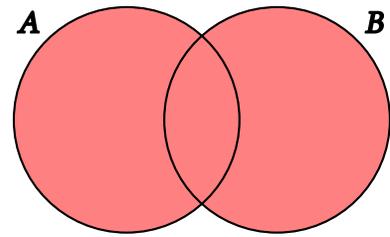
$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Isso se traduz para a seguinte regra de equivalência em lógica de predicados.

$$(\forall x)[x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)].$$

A sentença $x \in A \cup B$ é logicamente equivalente à sentença $(x \in A) \vee (x \in B)$. Esse fato é importante quando escrevemos demonstrações; uma dessas sentenças pode sempre ser substituída por outra.

Pense em “união” como o homólogo em teoria dos conjuntos do conectivo lógico “ou”. No diagrama de Venn ao lado, $A \cup B$ é a área sombreada.

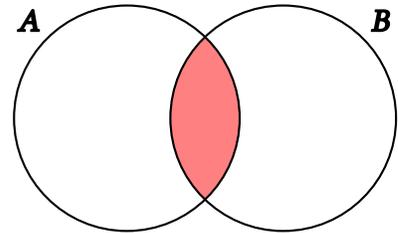


A *interseção* $A \cap B$ é o conjunto que contém todos os elementos que A e B têm em comum. Para que um elemento esteja na interseção de A e B , o elemento deve estar em ambos os conjuntos. Portanto, escrevemos a interseção como

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

na notação de construção de conjuntos. Isso implica a seguinte equivalência lógica para todo x .

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B).$$



No diagrama de Venn ao lado, a área sombreada representa $A \cap B$.

Nas sentenças de lógica de predicados anteriores está implícito um domínio, ou *conjunto universo* \mathcal{U} , do qual todo conjunto é um subconjunto. Se sabemos o que é o domínio \mathcal{U} , podemos falar do *complemento* A^c de A , que é o conjunto

$$A^c = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}.$$

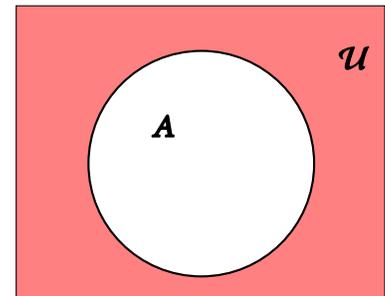
Geralmente desenhamos \mathcal{U} como um grande retângulo, de maneira que a área sombreada a seguir representa A^c .

Note que também poderíamos escrever $A^c = \{x \in \mathcal{U} \mid \neg(x \in A)\}$ para tornar explícito o uso do conectivo \neg .

Dizemos que dois conjuntos são idênticos se eles têm os mesmos elementos. Portanto, a sentença “ $A = B$ ” é traduzida para a seguinte sentença em lógica de predicados:

$$(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Essa tradução é importante quando se trata de demonstrar que dois conjuntos são idênticos. Uma prova de que $A = B$ geralmente consiste em duas provas diretas: dado $x \in A$, prove que $x \in B$, e ao contrário, dado $x \in B$, prove que $x \in A$. Em outras palavras, mostrar que $A = B$ corresponde a mostrar que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.



Exemplo 2.6

Sejam dados os conjuntos a seguir:

$$F = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 4k \text{ para algum inteiro } k\}$$

$$E = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ é par}\}$$

Prove que $F \subseteq E$.

Solução: Seja $x \in F$ um elemento qualquer. Pela definição de F , temos $x = 4k$ para algum número inteiro k . Podemos escrever esta equação como $x = 2(2k)$, desse modo x é par. Assim, $x \in E$. Como tomamos um elemento qualquer, isso vale para todo o conjunto F , portanto $F \subseteq E$.

Em geral, qualquer sentença envolvendo conjuntos e os símbolos \cap , \cup , \subseteq , $=$ e c é traduzida para uma sentença lógica usando os conectivos \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow e \neg , respectivamente. Dessa forma todo o trabalho que fizemos em lógica proposicional e de predicados no capítulo anterior será compensado quando lidarmos com conjuntos.

Pense nos símbolos \cap , \cup , \subseteq , $=$ e c como ferramentas para se fazerem novos conjuntos a partir de outros mais antigos. Por exemplo, dados dois conjuntos, A e B , podemos construir um novo conjunto $A \cap B$, consistindo em todos os elementos que os dois conjuntos têm em comum. Também podemos tomar dois conjuntos A e B e formar o *produto cartesiano* de $A \times B$. O produto cartesiano é apenas o conjunto de todos os pares ordenados em que o primeiro item pertence ao primeiro conjunto e o segundo item pertence ao segundo conjunto. Formalmente,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Também podemos ter trios ordenados, quartetos e assim por diante. O conjunto

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i\}.$$

é o conjunto de n -uplas em que o i -ésimo item vem do conjunto A_i .

Dois pares ordenados são iguais se, e somente se, suas partes correspondentes são iguais. Em outras palavras, $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$.

Você já está familiarizado com o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, o conjunto de todos os pares ordenados dos números reais. Esse conjunto é o plano cartesiano usual da álgebra ensinada no colégio.

Uma última construção que algumas vezes pode ser útil é o conjunto das partes de um conjunto S , o qual é denotado por $\mathcal{P}(S)$. O conjunto das partes de S é o conjunto de todos os subconjuntos de S :

$$\mathcal{P}(S) = \{X \mid X \subseteq S\}.$$

Note que o conjunto vazio \emptyset é um membro de $\mathcal{P}(S)$, não importa o que seja S , porque o conjunto vazio é um subconjunto de qualquer conjunto.

Exemplo 2.7

Suponha que você queira formar um grupo de estudos com alguns dos outros alunos da sua turma. Se S é o conjunto de todos os alunos na sua turma, então $\mathcal{P}(S)$ é o conjunto de todos os grupos de estudos possíveis que você poderia formar. (O conjunto vazio representaria a decisão de não formar grupo de estudo algum!)

Exemplo 2.8

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, e suponha que o conjunto universo é $\mathcal{U} = \{1, 2, \dots, 10\}$. Então

$$A \cup B = \{1, 2, \dots, 8\}$$

$$A \cap B = \{4, 5\}$$

$$B^c = \{1, 2, 3, 9, 10\}$$

$$(A \cap B) \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$$

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \{\emptyset, \{4\}, \{5\}, \{4, 5\}\}$$

Note que, enquanto A e B são conjuntos de números, os conjuntos que você constrói a partir de A e B podem ter elementos de diferentes tipos. Por exemplo, $(A \cap B) \times A$ acima é um conjunto de pares ordenados, e $\mathcal{P}(A \cap B)$ é um conjunto composto por conjuntos.

Os conjuntos que contêm um número finito de elementos são chamados de *conjuntos finitos*. É conveniente denotar o número de elementos em um conjunto S finito por $|S|$. Por exemplo, se S é o conjunto que contém todos os membros do Senado brasileiro, então $|S| = 81$.

Uma regra prática para lidar com tamanhos de conjuntos é o *princípio da inclusão-exclusão*.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (2.2)$$

Se olharmos para os diagramas de Venn para $A \cup B$ e $A \cap B$, no começo dessa seção, fica fácil visualizarmos porque essa regra é válida. Ao contar os elementos de $A \cup B$ contando os elementos de A e B e somando os resultados, contaríamos duas vezes os elementos que estão em $A \cap B$. Por esse motivo, “ $-|A \cap B|$ ” aparece ao lado direito da Equação (2.2). Essa equação pode ajudar a organizar problemas de contagem envolvendo conjuntos com elementos em comum.

Exemplo 2.9

Em alguma universidade de São Paulo, para se tornar membro da Sociedade dos Mestrês do Universo, é obrigatório ter conceito geral A na universidade ou pelo menos 900 pontos no ENEM. Dos 11 membros da sociedade, 8 fizeram pelo menos 900 pontos no ENEM, e 5 tiveram conceito geral A na universidade. Quantos membros tiveram tanto o mínimo de 900 pontos no ENEM quanto conceito geral A na universidade?

Solução: Seja A o conjunto de membros com conceito geral A , e seja B o conjunto de membros com pelo menos 900 pontos no ENEM. Então $A \cap B$ é o conjunto de membros com ambos os requisitos. Pelo princípio da inclusão-exclusão (Equação (2.2)),

$$11 = 5 + 8 - |A \cap B|$$

logo existem dois membros com ambos os requisitos.

2.1.2 Exercícios Propostos

- 1 Desenhe diagramas de Venn para ilustrar as regras de De Morgan para conjuntos.
- 2 Desenhe um diagrama de Venn para mostrar a região $A \cap B^c$. Essa região também é denotada por $A \setminus B$, e é chamada de *conjunto diferença*, por motivos óbvios.
- 3 Sejam $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, e suponha que o conjunto universo seja $\mathcal{U} = \{1, 2, \dots, 9\}$. Liste todos os elementos dos conjuntos a seguir.

a) $(A \cup B)^c$	c) $\mathcal{P}(B \setminus A)$
b) $(A \cap B) \times A$	d) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- 4 Sejam dados os conjuntos a seguir:
 - G = o conjunto de todos os cidadãos bons.
 - C = o conjunto de todas as pessoas caridosas.
 - P = o conjunto de todas as pessoas gentis.
 Escreva a sentença “Toda pessoa que é caridosa e gentil é um bom cidadão” na linguagem da teoria dos conjuntos.
- 5 Considere os conjuntos a seguir. O conjunto universo para este problema é \mathbb{N} .
 - A = O conjunto de todos os números pares.
 - B = O conjunto de todos os números primos.
 - C = O conjunto de todos os quadrados perfeitos.
 - D = O conjunto de todos os múltiplos de 10.
 Usando apenas os símbolos \mathbb{N} , \in , \subseteq , $=$, \neq , \cap , \cup , \times , c , \emptyset , escreva as seguintes sentenças em notação de conjuntos.
 - a) Nenhum dos quadrados perfeitos é número primo.
 - b) Todos os múltiplos de 10 são números pares.
 - c) O número 3 é um número primo que não é par.
 - d) Se você pegar todos os números primos, todos os números pares, todos os quadrados perfeitos e todos os múltiplos de 10, você ainda não terá todos os números naturais.

6 Considere os conjuntos a seguir. O conjunto universo \mathcal{U} para este problema é o conjunto de todas as pessoas residentes na Índia.

- A = O conjunto de todas as pessoas que falam inglês.
 B = O conjunto de todas as pessoas que falam hindi.
 C = O conjunto de todas as pessoas que falam urdu.

Expresse os seguintes conjuntos usando símbolos da teoria de conjuntos.

- a) Residentes na Índia que falam inglês, hindi e urdu.
 b) Residentes na Índia que não falam inglês, hindi ou urdu.
 c) Residentes na Índia que falam inglês, mas não falam hindi ou urdu.

7 Se $|A \cup B| = 20$, $|A| = 10$ e $|B| = 15$, encontre $|A \cap B|$. Faça um diagrama.

8 Se $|A \cup B| = 10$, $|A| = 8$ e $|A \cap B| = 4$, quantos elementos tem o conjunto B ?

9 Em uma classe de 40 alunos, todos tem ou um *piercing* no nariz ou um *piercing* na orelha. O professor pede para que todos os alunos com *piercing* no nariz levantem as mãos. Nove mãos se levantam. Em seguida o professor pede que todos com *piercing* na orelha façam o mesmo. Dessa vez, 34 mãos se levantaram. Quantos alunos têm *piercing*s tanto na orelha quanto no nariz?

10 Seja $S = \{a, b, c\}$. Escreva todos os elementos dos conjuntos a seguir.

- a) $S \times S$
 b) $\mathcal{P}(S)$

11 Liste todos os elementos de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$.

2.2 Funções

Você provavelmente já viu funções antes. Por exemplo, em álgebra no colégio, você aprendeu a representar graficamente funções como

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad (2.3)$$

e a fazer vários cálculos. Mas esse é um tipo muito específico de função; nesta seção iremos olhar as funções de uma perspectiva mais geral, usando a linguagem dos conjuntos.

Assim como os conjuntos, as funções descrevem relações matemáticas. Nesse tipo de relação, o valor de um objeto é completamente determinado pelo valor de outro. Na Equação (2.3), o valor de $f(x)$ fica fixado uma vez que sabemos qual o valor de x .

2.2.1 Definição e Exemplos

Definição 2.1: função

Uma *função* que vai de um conjunto X para um conjunto Y é uma regra precisa que atribui um único elemento de Y a cada elemento de X . Se f é tal função, escrevemos

$$f : X \rightarrow Y$$

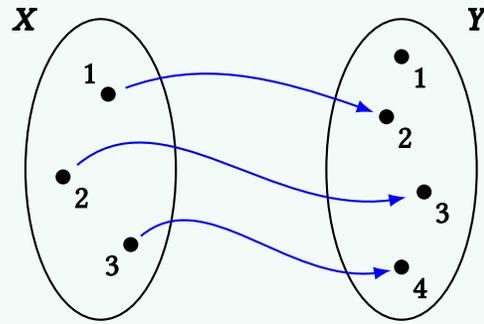
e denotamos o elemento de Y atribuído a $x \in X$ por $f(x)$. O conjunto X é chamado de *domínio* da função, e o conjunto Y é chamado de *contradomínio*.

Exemplo 2.10

Sejam $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. A fórmula $f(x) = x + 1$ define uma função $f : X \rightarrow Y$.

Para essa função, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ e $f(3) = 4$.

A figura ao lado mostra uma forma de representar graficamente essa associação entre os elementos.

**Exemplo 2.11**

A fórmula $f(x) = x^2 - 3x + 2$ define uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplo 2.12

Seja W o conjunto de todas as palavras deste livro, e seja L o conjunto de todas as letras no alfabeto. Defina a função $f : W \rightarrow L$ tomando $f(w)$ igual à primeira letra da palavra w . Note que a escolha da palavra w determina completamente $f(w)$, a primeira letra na palavra.

Exemplo 2.13

Uma sentença proposicional em duas variáveis define a função

$$z : \{V, F\} \times \{V, F\} \rightarrow \{V, F\}$$

onde $z(A, B)$ é o valor lógico da sentença quando as variáveis têm valores lógicos A e B . Por exemplo, a sentença $A \vee B$ define a função cujos valores são dados pela tabela ao lado.

A	B	$z(A, B)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo 2.14

Seja F o conjunto de todos os conjuntos finitos não vazios de números inteiros, de modo que $F \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Defina a função

$$s : F \rightarrow \mathbb{Z}$$

tomando $s(X)$ como a soma de todos os elementos de X . Por exemplo, $s(\{1, 2, 3\}) = 6$.

Uma outra palavra para função é *mapa* (alguns autores também usam o termo *aplicação*). Isso reflete o pensamento de que uma função é uma maneira de descrever uma rota de um conjunto a outro. No Exemplo 2.14, descrevemos uma forma de ir de um conjunto finito de inteiros para um número inteiro particular, ou seja, descrevemos um mapeamento a partir do conjunto de todos os conjuntos finitos de inteiros para o conjunto dos inteiros. Essa função associa ao conjunto $\{1, 2, 3\}$ o inteiro 6.

Isso ilustra um vasto leque de opções, já que podemos considerar conjuntos não apenas de números como também de listas de valores, de instruções, etc.

A notação $f(x)$ sugere o aspecto mais importante da definição da função: o valor da função é completamente determinado pelo objeto que você “insere” na função. Mais precisamente, a condição de que uma função deve ser *bem definida* significa que $f(x)$ tem um valor para cada x do domínio, e

$$a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$$

para todo a e b no domínio.

Uma função $f : X \rightarrow Y$ pode falhar em ser bem definida de duas maneiras:

☞ algum x no domínio X pode falhar em ter um y no contradomínio ao qual se associa, ou

☞ algum x no domínio pode ser associado (ambiguamente) a dois y 's diferentes no contradomínio.

Exemplo 2.15

Seja P o conjunto de todas as pessoas (mortas ou vivas). Seja

$$m : P \rightarrow P$$

tal que $m(x)$ é a mãe biológica de x . Temos que fazer suposições biológicas razoáveis para considerar esta uma função bem definida: todo mundo tem uma mãe biológica (por exemplo, nenhum clone) e nenhuma pessoa pode ter duas mães biológicas diferentes.

Pense em funções como ferramentas para descrever relações entre elementos de um conjunto, ou os elementos de dois conjuntos diferentes. Em nossa lista anterior de funções, o Exemplo 2.15 descreve a relação maternal de todas as pessoas (mortas ou vivas), enquanto o Exemplo 2.14 mostra como descrever conjuntos de inteiros utilizando os inteiros.

Podem parecer óbvio que funções dadas por fórmulas são sempre bem definidas, mas podem surgir dificuldades se existir mais de uma maneira de escrever o mesmo elemento do domínio, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.16

Seja $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0 \right\}$ o conjunto dos números racionais. Ponha

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = x + y$$

para todo $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$. Isso nos dá um função bem definida $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$?

Solução: Não. Como um contraexemplo, note que $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, mas

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 + 3 = 5 \neq f\left(\frac{4}{6}\right) = 4 + 6 = 10,$$

então f não é bem definida.

Exemplo 2.17

Mostre que a função $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x+y}{y}$$

está bem definida.

Solução: Seja $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$. Então

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{b}\right) &= \frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{b} \\ &= \frac{c}{d} + \frac{d}{d} = \frac{c+d}{d} = f\left(\frac{c}{d}\right) \end{aligned}$$

portanto f está bem definida.

2.2.2 Funções Injetivas e Sobrejetivas

Definição 2.2

Uma função $f : X \rightarrow Y$ é *injetiva* se, para todo a e b em X , $f(a) = f(b)$ implica que $a = b$. Nesse caso, nós dizemos que f é uma função injetiva de X para Y .

Definição 2.3

Uma função $f : X \rightarrow Y$ é *sobrejetiva* se para todo $y \in Y$ existe um $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Nesse caso dizemos que f envia X sobre Y .

Uma função injetiva sempre irá associar elementos diferentes do domínio a diferentes elementos do contradomínio. Em outras palavras, no máximo um elemento do domínio é enviado a um elemento qualquer do contradomínio.

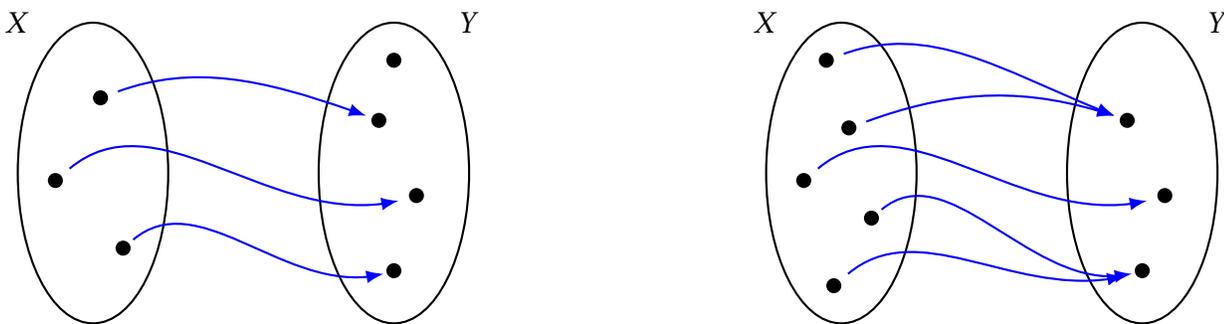


Figura 2.1: Exemplos de uma função injetiva (esquerda) e uma função sobrejetiva (direita).

Usamos o termo *imagem* para descrever o conjunto de todos os valores que uma função pode ter. Uma função sobrejetiva tem cada elemento do contradomínio em sua imagem. A Figura 2.1 ilustra uma função sobrejetiva. Note que o domínio é enviado sobre todo o contradomínio. Lembre como as definições são usadas em matemática: a fim de provar que uma função é injetiva ou sobrejetiva, quase sempre temos que usar a definição.

Exemplo 2.18

Mostre que a função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$f(x) = 2x + 1$$

é injetiva.

Solução: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e suponha que $f(a) = f(b)$. Então

$$2a + 1 = 2b + 1 \Rightarrow 2a = 2b \Rightarrow a = b$$

Mostramos que $f(a) = f(b)$ implica que $a = b$, ou seja, que f é injetiva.

Definição 2.4: Função Piso

Definimos e denotamos por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a x . Então, por exemplo, $\lfloor 4,3 \rfloor = 4$, $\lfloor -2,1 \rfloor = -3$ e $\lfloor 17 \rfloor = 17$. A função que envia x a $\lfloor x \rfloor$ é chamada de função **piso**.

Exemplo 2.19

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = \lfloor x \rfloor$.
Mostre que f envia \mathbb{R} sobre \mathbb{Z} .

Solução: Seja $n \in \mathbb{Z}$. Uma vez que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, então $n \in \mathbb{R}$ também. Contudo, uma vez que n é um número inteiro, $\lfloor n \rfloor = n$. Portanto, $f(n) = n$ e f é sobrejetiva.

As demonstrações nos dois últimos exemplos são padrões. Para provar que uma função f é injetiva, suponha $f(a) = f(b)$ e mostre que $a = b$. Para mostrar que uma função f é sobrejetiva, considere y um elemento do contradomínio e encontre algum x no domínio tal que $f(x) = y$.

Para provar que uma função não é injetiva ou sobrejetiva, procure um contraexemplo. A função do Exemplo 2.18 não é sobrejetiva porque, por exemplo, $38 \in \mathbb{Z}$, mas não existe um número inteiro x tal que $2x + 1 = 38$. Da mesma forma, a função no Exemplo 2.19 não é injetiva porque $\lfloor 9,3 \rfloor = \lfloor 9,8 \rfloor$, mas $9,3 \neq 9,8$. Note que esses dois exemplos mostram que ser injetiva não é o mesmo que ser sobrejetiva.

É claro que é possível para uma função ser tanto injetiva quanto sobrejetiva. Tal função é chamada de *bijetiva*, ou uma *bijeção*. Compare os exemplos a seguir com o Exemplo 2.18.

Exemplo 2.20

Mostre que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2x + 1$$

é uma bijeção.

Solução: Precisamos mostrar que f é tanto injetiva quanto sobrejetiva. A demonstração de que essa função é injetiva é exatamente a mesma que a do Exemplo 2.18. Para demonstrar que f é sobrejetiva, seja $y \in \mathbb{R}$ qualquer número real. Tome $x = \frac{y-1}{2}$. Então $x \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 \\ &= y - 1 + 1 = y \end{aligned}$$

Assim, f é também uma função sobrejetiva.

Exemplo 2.21

Seja $E = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ é par}\}$ e seja $O = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ é ímpar}\}$. Defina a função $f : E \times O \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$f(x, y) = x + y.$$

Responda se f é injetiva e/ou sobrejetiva. Prove ou dê contraexemplo.

Solução: Primeiramente mostramos que f não é sobrejetiva. Suponha, ao contrário, que f é sobrejetiva. Uma vez que $2 \in \mathbb{Z}$ é um elemento do contradomínio, existe algum par ordenado $(x, y) \in E \times O$ tal que $f(x, y) = x + y = 2$. Mas, uma vez que x é par e y é ímpar, $x + y$ é ímpar (verifique). Isso contradiz que 2 é par. n 1s ' 98 A seguir mostramos que f não é injetiva. Note que

$$f(4, -3) = 1 = f(6, -5)$$

mas $(4, -3) \neq (6, -5)$. Este contraexemplo mostra que f não é injetiva.

2.2.3 Composição de funções

Existem algumas maneiras comuns para formar novas funções a partir de antigas. Uma tal construção é a *composição* de duas funções. Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, então $g \circ f$ é uma função de X a Z definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Exemplo 2.22

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \lfloor x \rfloor$, e seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 3x$. Então

$$(g \circ f)(2,4) = g(f(2,4)) \quad \text{e} \quad (f \circ g)(2,4) = f(g(2,4)) \\ = g(2) = 6 \quad \quad \quad = f(7,2) = 7$$

Esse exemplo mostra que $f \circ g$ pode ser diferente de $g \circ f$. Perceba uma coisa potencialmente confusa sobre a notação: na composição $g \circ f$ fazemos f primeiro, e depois aplicamos g ao resultado. A ordem importa, em geral.

Algumas vezes gostaríamos de ser capazes de “desfazer” uma função, de forma que ela envie cada ponto de volta para onde ele veio. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função, então a *função inversa* de f é a função

$$f^{-1} : Y \rightarrow X$$

que tem a propriedade que $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ e $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$, onde id_A denota a chamada *função identidade* que associa cada elemento do conjunto A a si próprio.

Nem todas as funções têm inversas. Se $f : X \rightarrow Y$ tem uma inversa, então, para qualquer $y \in Y$, $f(f^{-1}(y)) = y$, de maneira que f deve enviar X sobre Y por completo. Além disso, se $f(a) = f(b)$, então podemos aplicar f^{-1} em ambos os lados dessa equação para ter $a = b$, de modo que f também deve ser injetiva. Assim, vemos que, se uma função possui uma inversa, ela deve ser uma bijeção.

De forma recíproca, podemos construir a inversa de qualquer bijeção $f : X \rightarrow Y$ ao pegar $f^{-1}(y)$ como o único elemento de X que é enviado em y . Sabemos que tal elemento existe, porque f é sobrejetiva, e sabemos que esse elemento é único, uma vez que f é injetiva.

Exemplo 2.23

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ é a função $f(x) = 2^x$, então a inversa de f é dada por $f^{-1}(x) = \log_2 x$.

Nesse último exemplo, poderíamos definir $f(x) = 2^x$ como uma função de \mathbb{R} em \mathbb{R} , mas então ela não seria invertível porque não seria sobrejetiva.

2.2.4 Exercícios Propostos

- 1 Escreva as definições de função injetiva e de sobrejetiva usando termos da lógica de predicados.
- 2 Seja P um conjunto de pessoas, e seja Q um conjunto de ocupações. Determine uma função $f : P \rightarrow Q$ definindo $f(p)$ igual à ocupação de p . O que deve ser verdade a respeito das pessoas em P para que f seja uma função bem definida?
- 3 Defina um função $t : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por $t(a, b) = (a + b, a - b)$. Prove que t é uma bijeção.
- 4 Considere a função negação $n : \{V, F\} \rightarrow \{V, F\}$ dada por $n(x) = \neg x$. Essa função é uma bijeção? O que é n^{-1} ?
- 5 Defina uma função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ por $f(x) = (2x + 3, x - 4)$.
 - a) f é injetiva? Prove ou dê um contraexemplo.
 - b) f é sobrejetiva? Mostre porque ou refute.

6 Seja $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ x - 5 & \text{se } x \text{ é par.} \end{cases}$$

a) Mostre que f é uma bijeção.

b) Encontre uma fórmula para f^{-1} .

7 Calcule a inversa de $f(x) = x^3 + 1$. Verifique sua resposta mostrando que $f(f^{-1}(x)) = x$ e $f^{-1}(f(x)) = x$.

8 Similar ao conceito da função piso, podemos definir a função *teto* denotando $\lceil x \rceil$ como sendo o menor inteiro maior ou igual a x . Encontre os valores abaixo para as funções piso e teto:

a) $\lceil 1, 1 \rceil$

b) $\lceil -\frac{3}{4} \rceil$

c) $\lceil \frac{7}{8} \rceil$

d) $\lceil -2, 99 \rceil$

e) $\lfloor 3 \rfloor$

f) $\lfloor \frac{1}{2} + \lfloor \frac{3}{2} \rfloor \rfloor$

g) $\lfloor \frac{1}{2} \cdot \lfloor \frac{5}{2} \rfloor \rfloor$

h) $\lceil \lfloor \frac{1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{1}{2} \rfloor + \frac{1}{2} \rceil$

2.3 Algumas funções importantes em Computação

Listamos aqui algumas funções que costumam aparecer em algoritmos e linguagens de programação.

2.3.1 Quociente inteiro e resto

Os conceitos de divisão (quociente) e resto de um número natural x por um inteiro positivo d são conhecidos e consensuais desde a antiguidade: 17 dividido por 3 é 5 com resto 2. O resto dessa divisão é também chamado “ x módulo d ”.

Em matemática, a divisão inteira é indicada às vezes pelo símbolo antigo ‘ \div ’, e o resto pela sigla ‘ mod ’, ambos usados como operações entre dois inteiros. Dessa forma podemos escrever $17 \div 3 = 5$ e $17 \text{ mod } 3 = 2$.

Estas operações podem ser definidas usando a função piso:

$$x \div d = \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$$

$$x \text{ mod } d = x - d(x \div d) = x - d \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$$

Em matemática, estas fórmulas são adotadas como definições dessas duas operações também no caso de x ser um inteiro negativo. Assim, $(-17) \div 3 = \lfloor \frac{-17}{3} \rfloor = -6$, e portanto $(-17) \text{ mod } 3 = (-17) - 3(-6) = 1$.

Mais geralmente, estas fórmulas também são usadas quando x é um número real, inclusive negativo, e d é um número real positivo. Assim, por exemplo, $3.1416 \div 0.001 = 3141$, e $3.1416 \text{ mod } 0.001 = 0.0006$.

Algumas linguagens de programação modernas, como Python, usam as definições acima, embora com outros símbolos. Outras linguagens, como C e Fortran, calculam $|x| \div d$ e $|x| \text{ mod } d$, e devolvem o resultado com o sinal de x . Nessas linguagens, por exemplo, $(-17) \div 3 = -5$ (em vez de -6).

e $(-17) \text{ mod } 3 = -2$ (em vez de 1). Embora pareçam menos naturais, as definições matemáticas são geralmente mais úteis, em matemática e programação, do que estas definições antigas.

Não há consenso sobre a definição de $x \div d$ ou $x \text{ mod } d$ quando d é negativo. Felizmente, este caso raramente ocorre, na prática ou na teoria.

Diz-se que dois números x e y são congruentes módulo d se $(x \text{ mod } d) = (y \text{ mod } d)$, ou seja se $(x - y) \text{ mod } d = 0$.

Exemplo 2.24

Os militares estadunidenses marcam o tempo usando 24 horas, com as horas variando de 0 a 23. Meia hora antes de meia-noite para os militares é 23:30. Os civis estadunidenses costumam marcar o tempo usando 12 horas; diferenciam a manhã e a tarde usando AM (do latim *ante meridiem*, antes do meio-dia) para a manhã e PM (*post meridiem*) para a tarde. Meia hora antes de meia-noite para os civis é 11:30 PM. A conversão do horário militar para o horário civil usa uma função módulo 12:

8:00 no horário militar: Calcule $8 \bmod 12 = 8$, obtendo 8:00 AM no horário civil

16:00 no horário militar: Calcule $16 \bmod 12 = 4$, obtendo 4:00 PM no horário civil

O sufixo AM ou PM é determinado pelo quociente na divisão, que pode ser 0 (AM) ou 1 (PM). A contagem módulo 12 começa em 0 e recomeça quando se atinge 12:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 0, 1, 2, 3, ...

Esse sistema de contagem é ensinado para crianças pequenas algumas vezes como “aritmética do relógio”.

2.3.2 Dispersão

Uma **função de dispersão** é uma função $h : S \rightarrow T$ tal que o domínio S é um conjunto de cadeias de texto ou valores inteiros e o contradomínio T é o conjunto de inteiros $\{0, 1, \dots, t - 1\}$, em que t é algum inteiro positivo relativamente pequeno. Se o domínio S consistir em cadeias de textos, podemos imaginá-las codificadas de alguma forma como valores inteiros, talvez por um algoritmo tão simples como o que converte cada letra individual em uma cadeia de texto em sua posição no alfabeto ($a = 1$, $b = 2$ e assim por diante) e depois soma a lista de inteiros resultante para obter um valor inteiro. Podemos, então, começar supondo que S consiste em valores inteiros.

A função h , portanto, leva um conjunto possivelmente grande de inteiros S em uma janela relativamente pequena de valores inteiros T . Logo, h não deve ser uma função injetora, já que podem existir muitos valores x_1, x_2, x_3, \dots em S tais que $h(x_1) = h(x_2) = h(x_3)$; nesse caso, dizemos que o valor da função foi “dispersado” para x_1, x_2, x_3 . Seja o que for que a função $h(x)$ faça com x , o último passo é quase sempre aplicar a função $\bmod t$ para que o resultado final caia no contradomínio $\{0, 1, \dots, t - 1\}$.

Exemplo 2.25

Sejam S um conjunto de inteiros positivos, T o conjunto de inteiros $\{0, 1, \dots, t - 1\}$ e a função de dispersão h é dada por

$$h(x) = x \bmod t$$

Se $t = 10$, por exemplo, então os valores são calculados módulo 10:

$$h(7) = 7 \bmod 10 = 7$$

$$h(23) = 23 \bmod 10 = 3$$

$$h(59) = 59 \bmod 10 = 9$$

$$h(158) = 158 \bmod 10 = 8$$

$$h(48) = 48 \bmod 10 = 8$$

Aqui o valor 8 foi dispersado para 158 e 48.

Uma função de dispersão é usada com frequência em algoritmos de busca. Na busca sequencial, n elementos estão armazenados em uma lista não ordenada (aleatória) e um valor alvo dado é comparado com todos os elementos da lista, um por um. Na busca binária, n elementos estão armazenados em uma lista ordenada. O valor alvo dado é comparado com o ponto do meio da lista, depois com o ponto do meio de uma das metades da lista e assim por diante. Em uma busca usando uma função de dispersão, n elementos estão armazenados em um array (uma tabela unidimensional) chamado de tabela de dispersão, com o array indexado de 0 a $t - 1$; a tabela tem tamanho t . O elemento x é passado como argumento da função de dispersão, e o valor $h(x)$ resultante fornece o índice no array onde o elemento é armazenado. Mais tarde, quando é feita uma busca, o valor alvo é passado pela mesma função de dispersão, fornecendo um índice para o local na tabela de dispersão, onde o elemento alvo será procurado.

Exemplo 2.26

Registros de votação para os cidadãos em determinado distrito dos EUA são armazenados em uma tabela de dispersão de tamanho 197 usando o número da Previdência Social com um valor-chave (o valor que será usado pela função de dispersão). Usando uma função de dispersão módulo o tamanho da tabela de dispersão, o índice para se buscar primeiro pelos dados sobre um eleitor com número da Previdência Social

328356770

é

$$328356770 \bmod 197 = 125$$

Funções de dispersão também são conhecidas como **funções HASH** e são um componente fundamental de Segurança Computacional (ou o termo mais geral, Segurança da Informação), um tópico de interesse crítico, já que nossa economia, nossos interesses e, de fato, toda a nossa vida dependem tanto de computadores e de informação. A função mod aparece em muitos aspectos de segurança, em especial em **Criptografia**, o estudo dos vários esquemas de codificação/decodificação. O termo mais amplo, Criptologia, inclui não só a criptografia, mas também as técnicas usadas para analisar e “quebrar” os códigos de mensagens cifradas. Um dos exemplos mais famosos de códigos que foram quebrados ocorreu durante a Segunda Guerra Mundial, quando um time de analistas ingleses, incluindo o matemático Alan Turing, trabalhando em Bletchley Park, conseguiu quebrar o código “Enigma”, supostamente invencível, e decifrar os planos dos movimentos dos submarinos alemães.

PENSAMENTO QUANTITATIVO

Sequências são listas ordenadas de elementos. As sequências são usadas em Matemática de várias maneiras. Elas podem ser usadas para representar soluções de certos problemas de contagem, como veremos nas seções seguintes. Elas são também uma estrutura de dados importante em Ciência da Computação. Veremos uma revisão da notação usada para representar sequências e somas dos termos das sequências.

3.1 Sequências

Uma sequência é uma estrutura discreta usada para representar uma lista ordenada. Por exemplo, 1, 2, 3, 5, 8 é uma sequência com cinco termos e 1, 3, 9, 27, 81, ..., 30, ... é uma sequência infinita.

Definição 3.1: Sequência

Uma sequência é uma função de um subconjunto dos números inteiros para um conjunto S . Usamos habitualmente a notação x_i (em vez de $x(i)$) para indicar a imagem do número inteiro i . O inteiro i é o índice e x_i é o valor do termo (i, x_i) na sequência.

Usamos a notação $\{x_n\}$ para descrever a sequência. (Note que x_n representa um único termo da sequência $\{x_n\}$. Note também que a notação $\{x_n\}$ para a sequência é a mesma para a notação de um conjunto. Entretanto, o contexto no qual usamos essa notação sempre deixará claro quando do estamos trabalhando com conjuntos ou com sequências. Note que, apesar de termos usado a letra x na notação para uma sequência, outras letras ou expressões podem ser usadas, dependendo da sequência que considerarmos. Ou seja, a escolha da letra x é arbitrária.)

Descrevemos as sequências pela listagem de termos da sequência em ordem crescente de índices.

Exemplo 3.1

Considere a sequência $\{a_n\}$, em que

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

A lista de termos dessa sequência, começando por a_1 , ou seja, $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$, começa com

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Definição 3.2: Progressão Geométrica

Uma *progressão geométrica* é uma sequência na forma $a, ar, ar^2, \dots, ar^n, \dots$ em que o termo inicial a e a razão r são números reais.

Nota:

Uma progressão geométrica é um análogo discreto de uma função exponencial $f(x) = ar^x$.

Exemplo 3.2

As seqüências $\{b_n\}$, com $b_n = (-1)^n$, $\{c_n\}$, com $c_n = 2 \cdot 5^n$ e $\{d_n\}$, com $d_n = 6 \cdot (\frac{1}{3})^n$ são progressões geométricas como termo inicial igual a 1 e -1 ; 2 e 5; 6 e $\frac{1}{3}$, respectivamente, se começarmos com $n = 0$. A lista de termos $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$ começa com 1, -1 , 1, -1 , 1, \dots ; a lista de termos $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, \dots$ começa com 2, 10, 50, 250, 1250, \dots ; e a lista de termos $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, \dots$ começa com 6, $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots$

Definição 3.3: progressão aritmética

Uma *progressão aritmética* é uma seqüência da forma

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots$$

em que o termo inicial a e a diferença (ou razão d são números reais.

Nota:

Uma progressão aritmética é um análogo discreto da função linear $f(x) = dx + a$.

Exemplo 3.3

As seqüências $\{s_n\}$ com $s_n = -1 + 4n$ e $\{t_n\}$, com $t_n = 7 - 3n$ são progressões aritméticas com termos iniciais e diferenças comuns iguais a -1 e 4 e 7 e -3 , respectivamente, se começarmos em $n = 0$. A lista de termos $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$ começa com $-1, 3, 7, 11, \dots$, e a lista de termos $t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \dots$ começa com 7, 4, 1, $-2, \dots$

Nota:

Em matemática (e em algumas linguagens de programação, como FORTRAN e Julia), o índice inicial de uma seqüência é geralmente 1 por convenção. Uma vantagem desta escolha é que o segundo termo de uma seqüência $\{x_n\}$ é x_2 , o terceiro é x_3 , etc.; ou seja, o k -ésimo elemento é x_k . Alguns autores, entretanto, preferem numerar os termos a partir de 0. Note que, neste caso, em uma seqüência com n termos os índices variam de 0 a $n - 1$. Além disso, o segundo elemento é x_1 e não x_2 , o terceiro é x_2 , e o k -ésimo é x_{k-1} . Apesar destas incongruências, a numeração a partir de 0 tem certas vantagens em computação, e é o padrão de várias linguagens de programação modernas, como C, Java e Python.

3.1.1 Somatórios

A notação de somatório fornece um modo mais curto de escrever determinadas somas de parcelas, em especial, somas de termos de uma seqüência. Como exemplo, considere a soma dos inteiros de 1 a 5:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

Pode-se pensar nessa soma da seguinte maneira: suponha que temos alguma quantidade i que tem, inicialmente, o valor 1 e que assume, sucessivamente, os valores 2, 3, 4 e 5. A expressão acima é a soma de todos os valores de i . A notação de somatório é

$$\sum_{i=1}^5 i.$$

A letra grega maiúscula sigma, Σ , denota o somatório. O número 1 é o limite inferior do somatório, e o número 5 é o limite superior do somatório. A variável i é chamada de índice do somatório. O índice do

somatório assume, inicialmente, o valor do limite inferior e depois vai crescendo, de um em um, até atingir o limite superior. Todos os valores do índice do somatório são somados. Assim,

$$\sum_{i=1}^5 i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

Analogamente,

$$\sum_{i=4}^8 i = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30.$$

e

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55.$$

Nesses exemplos, a expressão após o símbolo de somatório é, simplesmente, i , o índice do somatório. No entanto, o que aparece após o símbolo de somatório pode ser qualquer expressão, e os valores sucessivos do índice são substituídos na expressão.

Um modo de simbolizar somatórios em geral é

$$\sum_{i=p}^q x_i.$$

Não especificamos, aqui, o limite inferior, o limite superior nem a expressão após o símbolo de somatório; colocamos, apenas, símbolos para cada um deles. A notação x_i significa que a expressão será calculada para os diferentes valores de i , do limite inferior até o superior.

Temos três casos especiais para considerar:

$$\textcircled{1} \quad \sum_{i=p}^q 0 = 0$$

A expressão aqui após o sinal de somatório é a constante 0, que tem o valor 0 independentemente do valor do índice do somatório. A soma de qualquer número de algarismos iguais a 0 é 0.

$$\textcircled{2} \quad \sum_{i=p}^q 1 = 0$$

Novamente, a expressão após o símbolo de somatório é uma constante, e o somatório diz que temos que somar n cópias de 1, o que é igual a n .

$$\textcircled{3} \quad \sum_{i=1}^0 a_i = 0$$

Nesse somatório o limite superior é menor do que o inferior; a interpretação usual de somatório não se aplica, mas convencionamos que, nesse caso, o somatório é igual a 0.

O índice do somatório é uma **variável muda**, ou seja, ela simplesmente marca o lugar do número que está sendo mudado e poderíamos usar qualquer outra variável sem mudar o valor do somatório. Assim,

$$\sum_{i=1}^3 i = \sum_{j=1}^3 j = 6.$$

Pode ser conveniente mudar os limites em um somatório, o que é permitido desde que o valor do somatório permaneça o mesmo. Por exemplo,

$$\sum_{i=1}^3 i = \sum_{i=0}^2 (i+1) = 6.$$

já que ambos têm o valor $1 + 2 + 3 = 6$.

Finalmente, as três regras a seguir são válidas, como veremos em breve.

Proposição 3.1 : Regras para Somatórios

- ① $\sum_{i=p}^q (a_i + b_i) = \sum_{i=p}^q a_i + \sum_{i=p}^q b_i$
- ② $\sum_{i=p}^q (a_i - b_i) = \sum_{i=p}^q a_i - \sum_{i=p}^q b_i$
- ③ $\sum_{i=p}^q ca_i = c \sum_{i=p}^q a_i$, em que c é uma constante.

Algumas vezes um somatório pode ser representado por uma expressão ainda mais curta, que não envolve a soma de parcelas separadas. Por exemplo,

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

de modo que o valor de $\sum_{i=1}^n i^2$ pode ser encontrado substituindo o limite superior, 5, na expressão à direita, obtendo-se

$$\frac{5(5+1)(2 \cdot 5 + 1)}{6} = \frac{5(6)(11)}{6} = 5 \cdot 11 = 55$$

como havíamos encontrado antes.

3.1.2 Exercícios propostos

1 Quais são os termos x_0, x_1, x_2, x_3 da sequência em que x_n é igual a:

- | | |
|------------------|--|
| a) $2^n + 1$ | c) $\lfloor n/2 \rfloor$ |
| b) $(n+1)^{n+1}$ | d) $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil$ |

2 Quais são os valores das somas abaixo, em que $D = \{1, 3, 5, 7\}$?

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------------|
| a) $\sum_{k=1}^5 (k+1)$ | d) $\sum_{j \in D} j$ |
| b) $\sum_{j=0}^4 (-2)^j$ | e) $\sum_{j \in D} j^2$ |
| c) $\sum_{j=0}^8 (2^{j+1} - 2^j)$ | f) $\sum_{j \in D} \frac{1}{j}$ |

3 Quais são os valores dos produtos abaixo?

- | | |
|-------------------------|-------------------------------|
| a) $\prod_{i=0}^{10} i$ | c) $\prod_{i=1}^{100} (-1)^i$ |
| b) $\prod_{i=5}^8 i$ | |

3.2 Técnicas de Contagem

Contar é importante. Muitos problemas em matemática, ciência da computação e outras áreas técnicas envolvem contar os elementos de algum conjunto de objetos. Mas essa contagem nem sempre é fácil. Nesta seção iremos investigar ferramentas para contagem de determinados tipos de conjuntos e aprenderemos como pensar os problemas sob um ponto de vista quantitativo. O objetivo deste capítulo é ver como o pensamento quantitativo é útil para analisar problemas discretos, especialmente em ciência da computação. Um curso em análise combinatória ensinará a você mais sobre técnicas específicas de contagem; nossa intenção aqui será revisar algumas dessas técnicas, mas também ver por que essas técnicas são importantes no estudo de processos discretos.

3.2.1 Técnicas Básicas de Contagem

A maioria dos problemas de contagem pode ser reduzida a soma e multiplicação. Isso soa fácil, mas a parte mais difícil é saber quando somar e quando multiplicar. Começaremos com alguns exemplos bem simples.

Na página 25 a Equação (2.2) introduziu o Princípio da inclusão-exclusão. Ele afirma que se A e B são conjuntos finitos, então o tamanho da união entre A e B é dado por

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Dizemos que A e B são disjuntos se $A \cap B = \emptyset$. Nesse caso, o princípio da inclusão-exclusão se reduz à equação $|A \cup B| = |A| + |B|$. Em outras palavras, se dois conjuntos não têm elementos em comum, então para contarmos o número total de elementos em ambos os conjuntos contamos os elementos de cada conjunto e somamos. Essa simples observação nos dá o primeiro princípio de contagem.

Proposição 3.2 : Princípio da Adição

Suponha que A e B sejam conjuntos finitos com $A \cap B = \emptyset$. Então existem $|A| + |B|$ maneiras de escolher um elemento de $A \cup B$.

Em problemas de contagem, os conjuntos disjuntos geralmente tomam a forma de opções mutuamente excludentes ou casos. Se temos uma escolha “ou isso ou aquilo”, ou um problema que se reduz a casos separados, o Princípio da adição provavelmente será usado.

Exemplo 3.4

Raul tem cinco bicicletas e três carros. Ele pode chegar ao trabalho usando qualquer um desses veículos. De quantas formas diferentes ele pode chegar ao trabalho?

Solução: Uma vez que não é possível pegar tanto o carro quanto a bicicleta para ir ao trabalho, esses conjuntos são disjuntos. Portanto, Raul tem $5+3=8$ opções.

Exemplo 3.5

Certo dia, um restaurante serviu café da manhã para 25 pessoas e, mais tarde, almoço para 37 pessoas. No total quantos clientes diferentes o restaurante teve nesse dia?

Solução: Não temos informações suficientes para responder esta questão como foi enunciada. Antes de contarmos com precisão o número total de clientes, precisamos saber se algum dos clientes que tomou o café da manhã retornou para o almoço. Se nenhum cliente retornou, então os clientes do café da manhã são disjuntos dos clientes do almoço, e o total $25 + 37 = 62$. Mas suponha que quatro clientes do café da manhã tenham voltado para o almoço. Então pelo Princípio da inclusão-exclusão,

foram apenas $25 + 37 - 4 = 58$ clientes no total. Outro jeito de olharmos para essa situação é pensar nos clientes fazendo parte de três conjuntos disjuntos: clientes que so tomaram o café da manhã, clientes que so comeram o almoço, e clientes que comeram café da manhã e almoço. O tamanho desses três conjuntos é 21, 33 e 4, respectivamente, portanto, pelo Princípio da adição, o total é $21 + 33 + 4 = 58$.

Estritamente falando, esse último raciocínio usou uma versão um pouco mais forte do Princípio da adição, a qual iremos enunciar como teorema

Teorema 3.1

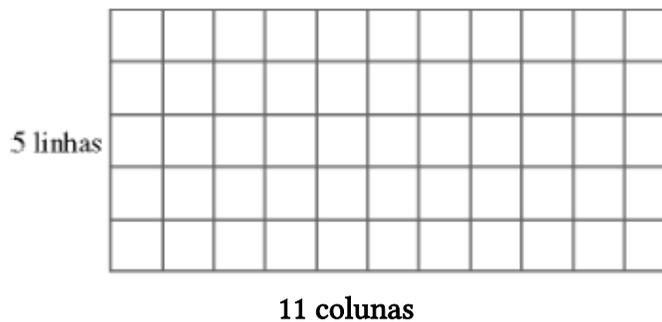
Suponha que $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ sejam conjuntos finitos disjuntos dois-a-dois, ou seja, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todos i e j com $i \neq j$. Então

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_n|.$$

Em outras palavras, não importa quantos casos disjuntos você tenha, você pode contar o total somando a contagem de cada um deles.

3.2.2 Multiplicação

Contar os elementos em uma grade retangular é fácil: você multiplica o número de linhas pelo número de colunas.



Podemos sempre pensar em um produto cartesiano $A \times B$ de dois conjuntos finitos A e B como uma grade, cujas colunas são indexadas por A e as linhas são indexadas por B . Enunciamos essa observação como um outro Princípio

Proposição 3.3 : Princípio da Multiplicação

Sejam A e B conjuntos finitos. O número de elementos (ou seja, pares ordenados) em $A \times B$ é $|A| \cdot |B|$. Portanto, existem $|A| \cdot |B|$ maneiras de escolher dois itens em sequência, com o primeiro vindo de A e o segundo vindo de B .

Exemplo 3.6

Raul tem cinco bicicletas e três carros. Ele planeja ir e voltar do trabalho pedalando uma bicicleta e depois pegar um de seus carros para dirigir até um restaurante onde irá jantar. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer isso?

Solução: Raul está fazendo duas escolhas em sequência, portanto ele está formando um par ordenado da forma (bicicleta, carro). Portanto existem $5 \cdot 3 = 15$ maneiras possíveis.

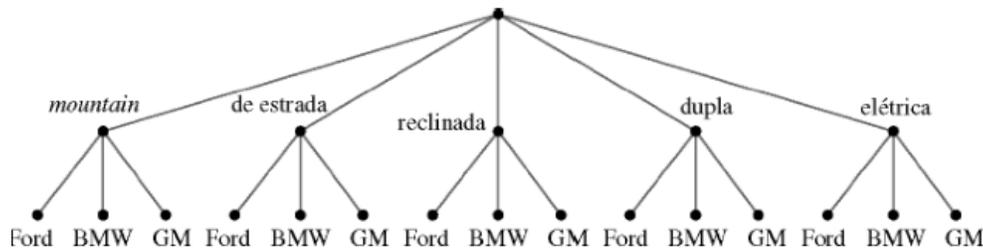


Figura 3.1: Uma árvore de decisão para o problema de contagem no Exemplo 3.6.

O processo de decisão desse ultimo exemplo tem um bom modelo gráfico na forma de uma árvore (Figura 3.1). Seja a raiz da árvore o que representa a situação de Raul antes de ele ter chegado a alguma decisão. Os vértices de profundidade 1 correspondem as cinco bicicletas diferentes que Raul pode pegar para o trabalho (*mountain*, *de estrada*, *reclinada*, *dupla*, *elétrica*) e os vértices de profundidade 2 representam a escolha do carro para o transporte ate o jantar (Ford, BMW, GM). Cada caminho da raiz ate a folha representa uma escolha de uma sequencia ordenada da forma (bicicleta, carro), então o numero de caminhos pela árvore (ou seja, o número de folhas) é igual ao numero de diferentes sequencias que Raul pode escolher. Um modelo desse tipo é chamado de árvore de decisão.

Assim como o Princípio da adição, o Princípio da multiplicação se generaliza para coleções de mais de dois conjuntos

Teorema 3.2

Suponha que $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ sejam conjuntos finitos. Então

$$|A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

Note que, diferentemente do Princípio da Adição, os conjuntos no Princípio da Multiplicação não precisam ser disjuntos. O próximo exemplo usa o fato de que $|A \times A \times A| = |A| \cdot |A| \cdot |A|$.

Exemplo 3.7

Quantas cadeias de profundidade 3 podem ser formadas a partir de um alfabeto com 26 símbolos?

Solução: Existem três escolhas a serem feitas em sequencia: a primeira letra, a segunda letra e a terceira letra. Temos 26 opções: para cada escolha. Portanto, o numero total de strings com profundidade 3 é $26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^3 = 17.576$.

Exemplo 3.8

Quantas cadeias binarias de comprimento 24 diferentes existem?

Solução: Existem duas soluções para cada digito: 0 ou 1. Escolher uma cadeia de comprimento 24 envolve fazer essa escolha 24 vezes, em sequencia. Portanto, o número de possibilidades

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{24 \text{ dois}} = 2^{24} = 16.777.216.$$

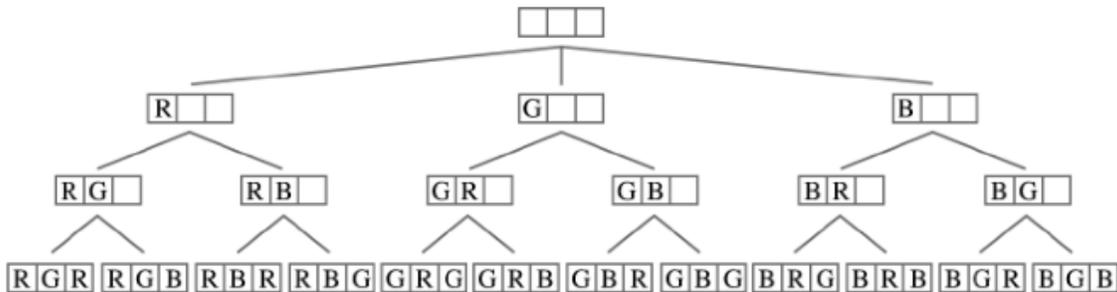
Em Computação Gráfica, os valores de cor são geralmente representados por tal cadeia de zeros e uns. Esse tipo de cor conhecido como “true color”, “cor de 24bits”, ou “milhões de cores”, refletindo o número de escolhas possíveis de cor.

Os dois últimos exemplos não se prestam muito para árvores de decisão; as árvores seriam muito grandes para serem desenhadas. Mas na verdade não precisamos de árvores de decisão para problemas tão simples; é fácil ver como aplicar o Teorema 3.2 diretamente. No entanto, para problemas que envolvem escolhas separadas, em que as escolhas feitas depois são limitadas por escolhas feitas antes, as árvores de decisão são bastante úteis.

Exemplo 3.9

Quantos desenhos da forma $\square\square\square$ são possíveis, se cada quadrado deve ser ou vermelho, ou verde ou azul e dois quadrados adjacentes não podem ser da mesma cor?

Solução: Se não existissem restrições para quadrados adjacentes, então este problema seria exatamente como formar uma cadeia de três caracteres a partir de um alfabeto de três letras (R, G, B)*, então o número de desenhos seria 3^3 , se raciocinarmos como no Exemplo 3.17. Mas essa solução conta desenhos como RRG, que tem dois quadrados adjacentes coloridos de vermelho portanto ele excede a contagem correta de número de desenhos. Uma maneira de evitarmos esse erro é usar a árvore de decisão na Figura 3.2. Essa árvore mostra que existem apenas $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ desenhos que obedecem as restrições dadas.



A árvore de decisão para o Exemplo 3.9 nos ajuda a ver como aplicar o Princípio da Multiplicação. Pense no processo de fazer um desenho como uma sequência de três decisões. Você pode fazer o primeiro quadrado com qualquer uma das cores que você quiser: R, G ou B. Mas depois que essa decisão é tomada, o segundo quadrado deve ser uma das duas outras cores. Similarmente, o terceiro quadrado deve ser diferente do segundo quadrado, portanto também existem apenas duas escolhas. Ao aplicar o Teorema 4.2, o número total de maneiras para fazer essa sequência de três escolhas $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. Portanto, podemos solucionar esses tipos de problemas sem desenhar realmente a árvore de decisão.

Exemplo 3.10

Quantas cadeias diferentes de comprimento 7 podem ser formadas a partir de um alfabeto de 26 símbolos, se dois símbolos adjacentes nunca podem ser iguais?

Solução: A árvore de decisão para este problema se parece com a árvore na Figura 4.3, porém com muito mais galhos. Existem 26 escolhas para o primeiro símbolo na cadeia, e depois existem 25 escolhas para cada símbolo a partir daí. Por isso, o número total de tais cadeias $26 \cdot 25^6 = 6.347.656.250$.

Exemplo 3.11

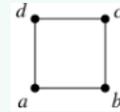
As ruas de um área comercial formam uma grade, como mostra a Figura 4.4. Suponha que um cliente entre na área comercial pelo ponto A e comece a andar na direção da seta. Em cada uma das interseções, o cliente escolhe ir para leste ou sul de modo a tomar o caminho mais curto possível para a livraria no ponto B. Quantos caminhos diferentes o cliente pode fazer?

placas binárias, por exemplo, seria um pouco estranho).

Algumas vezes é fácil vermos como se divide um problema de contagem em casos separados, mas geralmente isso não é tão óbvio. No próximo exemplo, os dois casos se tornam claros somente após tentarmos contar todas as possibilidades como um único caso.

Exemplo 3.14

Usando as quatro cores vermelho (R), verde (G), azul (B) e violeta (V), de quantas maneiras diferentes podemos colorir os vértices do grafo?



de modo que dois vértices adjacentes não tenham a mesma cor?

Solução: Note a semelhança com o Exemplo 4.6; começaremos com a tentativa de uma solução similar. Colorimos um vértice digamos que o a , com uma das quatro cores R, G, B ou V. Agora existem três cores possíveis para cada um dos vértices adjacentes b e d , então temos $4 \cdot 3 \cdot 3$ maneiras de colorir esses três vértices. Agora devemos contar as maneiras de colorir o vértice c . Mas ficamos presos aqui, porque, se b e d são da mesma cor, então temos três escolhas para c , mas se as cores de b e d são diferentes nos restam apenas duas escolhas para c . Portanto, devemos considerar dois casos disjuntos

Caso 1. Suponha que b e d sejam cores diferentes. Então, como visto anteriormente, temos quatro escolhas para a , três escolhas para b , e então duas escolhas para d , uma vez que este deve diferir tanto de a quanto de b . Restam-nos apenas duas escolhas para c , para um total de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ cores diferentes.

Caso 2. Suponha que b e d sejam coloridos com a mesma cor. Então temos quatro escolhas para a , e então três escolhas para a cor que b e d compartilham. Existem então três escolhas para c , para um total de $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ maneiras de colorir este caso.

Pelo Princípio da adição, o número total de colorações é $48+36=84$.

3.2.4 Exercícios propostos

1 O professor Silas Couto tem 30 alunos na sua turma de Cálculo e 24 alunos na sua turma de Matemática Discreta.

(a) Assumindo que nenhum aluno cursa ambas as matérias, quantos alunos tem o professor Silas?

(b) Assumindo que oito alunos cursam ambas as matérias, quantos alunos tem o professor Silas?

2 Um restaurante oferece dois tipos diferentes de sopa e cinco tipos diferentes de salada.

(a) Se você pode pedir uma sopa ou uma salada, quantas escolhas você tem?

(b) Se você pode pedir tanto sopa quanto salada, quantas escolhas você tem?

3 No Arquipélago Queen Elizabeth, no Canadá, existem 18 grandes ilhas oceânicas. Existem 15 grandes lagos em Saskatchewan, Canadá. Se você está planejando uma viagem para visitar um dessas

ilhas, seguida por um desses lagos, quantas viagens diferentes você pode fazer?

4 Belmiro tem três macacões de peça única, cinco pares de calças de trabalho e oito camisas de trabalho. Ele ou usa um macacão ou uma calça com uma camisa para trabalhar. Com quantas possibilidades diferentes Belmiro pode se vestir para ir ao trabalho?

5 Um carro novo é oferecido com dez pacotes opcionais diferentes. O vendedor afirma que existem “mais de 1.000 combinações diferentes disponíveis. Essa afirmação se justifica? Explique.

6 As placas de identificação na China começam com um caractere chinês designando a província, seguido por uma letra do conjunto (A, \dots, Z) , seguida por uma cadeia composta por cinco caracteres alfanuméricos (usando símbolos do conjunto $\{A, \dots, Z, 0, 1, \dots, 9\}$). Qual o número máximo de

placas desse tipo que podem existir em uma dada província chinesa?

7 A fita codificadora de proteínas de um gene humano médio consiste em 1350 nucleotídeos. Supondo que cada nucleotídeo pode assumir qualquer um dos quatro valores (A, T, C, ou G), quantos genes diferentes com exatos 1350 nucleotídeos são possíveis?

8 Existem 16 times de futebol na Primeira Divisão da Tailândia, e existem 22 times na Primeira Divisão da Inglaterra

(a) Quantas maneiras diferentes existem de combinar em pares um time da Tailândia com um time da Inglaterra?

(b) Quantas maneiras diferentes existem de combinar em pares dois times da Tailândia? (Cuidado: Combinar Bangkok Bank FC com Chonburi FC é o mesmo que combinar Chonburi FC com Bangkok Bank FC.)

9 Existem quantas cadeias binárias de quatro dígitos que não contem 000 ou 111? (Use uma árvore de decisão).

10 Seja X um conjunto contendo 20 elementos. Use o Princípio da multiplicação para calcular $|P(X)|$ o tamanho do conjunto das partes de X (Dica: Para encontrar um subconjunto de X , você deve escolher se vai ou não incluir cada elemento de X .)

3.2.5 Seleções e Arranjos

Ate agora, vimos como enumerar conjuntos usando adição e multiplicação. Esses princípios básicos podem ser aplicados a quase todos os problemas de contagem em Matemática Discreta, mas existem muito mais técnicas de contagem que poderíamos estudar. Embora possamos passar facilmente um semestre aprendendo essas técnicas, as duas próximas seções irão focar algumas das ideias mais importantes para a Solução de problemas quantitativos

Nesta seção iremos nos concentrar em duas tarefas: selecionar e arranjar. Um problema de seleção envolve escolher um subconjunto de elementos de um conjunto dado. Um problema de arranjo envolve escolher um subconjunto e então colocar seus elementos em alguma ordem particular. Quando somos capazes de pensar em um problema de contagem em termos de seleções arranjos, a Solução costuma ser mais fácil de ser enxergada.

Aqui esta um exemplo de um problema de arranjo:

Exemplo 3.15

Iago tem 26 imãs de geladeira na forma de letras de A a Z. Quantas cadeias diferentes de três letras ele pode formar com os imãs?

Solução: Este é um problema de “placa de carro” (veja o Exemplo 3.13), porém com uma restrição. Uma vez que Iago tem apenas um imã para cada letra, ele não tem permissão para repetir letras. Existem três espaços a serem preenchidos. Ele tem 26 escolhas para o primeiro espaço. Uma vez que ele não pode reutilizar essa letra, ele tem 25 escolhas para o segundo espaço e, da mesma forma, 24 para o terceiro. Portanto, o numero total de cadeias possíveis $26 \cdot 25 \cdot 24$.

A solução utiliza o Princípio da multiplicação, mas a cada decisão sucessiva o numero de letras é reduzido em um. O *Princípio do arranjo* dá a regra geral:

Definição 3.4: Princípio do Arranjo.

O número de maneiras de formar uma lista ordenada de r elementos distintos escolhidos em um conjunto de n elementos é

$$P_r^n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - r + 1).$$

Uma lista como essa é chamada de *arranjo*. Note que os arranjos tem duas propriedades-chave: a ordem dos elementos importa e todos os elementos são distintos.

A notação P_r^n vem do termo matemático para arranjos: *permutações*. Note que

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

é um jeito conveniente de expressar o numero de permutações em termos da função fatorial. Lembre que a função fatorial definida por

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

e, por convenção, $0! = 1$. Note também que $P_n^n = n!$

Exemplo 3.16

Um time de beisebol é formado por 24 jogadores. De quantas maneiras diferentes o técnico pode escolher uma lista ordenada de 9 batedores?

Solução: Existem $P_9^{24} = 24!/15! = 474.467.051.520 \approx 4,74 \times 10^{11}$ maneiras de fazer tal lista.

Exemplo 3.17

Quantas maneiras diferentes existem para rearmarmos as letras na palavra CONVERSA?

Solução: É importante notarmos que todas as letras da palavra CONVERSA são diferentes. Assim, elas formam um conjunto de oito letras, e rearmar as letras consiste em escolher uma lista ordenada de oito elementos distintos a partir desse conjunto. O numero de maneiras para se fazer isso $P_8^8 = 8! = 40.320$.

Rearmar as letras na palavras CONVERSA é o mesmo que achar uma correspondência bijetiva

$$f: \{C, O, N, V, E, R, S, A\} \rightarrow \{C, O, N, V, E, R, S, A\}.$$

Para qualquer letra ℓ em CONVERSA, $f(\ell)$ é a letra que a substitui no rearmar. Em geral, se X é um conjunto finito com elementos, então o número de correspondências bijetivas $f: X \rightarrow X$ é $n!$. Uma função como esta é chamada de *permutação* do conjunto X .

Exemplo 3.18

Uma gaveta de cozinha contem dez diferentes recipientes de plástico para comida e dez tampas diferentes, mas qualquer tampa se encaixa em qualquer um dos recipientes. De quantas maneiras diferentes podemos casar as tampas com os recipientes?

Solução: A chave para resolver este problema é pensar sobre ele da forma correta. A fim de ordenar em pares cada recipiente com uma tampa, comece por alinhar todos os recipientes em uma linha. (não importa como você ira alinhá-los.) Agora, escolha um arranjo das dez tampas e posicione as tampas nessa ordem ao lado dos recipientes. Isso determina uma correspondência entre recipientes e tampas, e todas as correspondências são determinadas dessa forma. A única escolha foi feita durante o arranjo das tampas, portanto existem $P_{10}^{10} = 10! = 3.628.800$ maneiras de casar tampas e recipientes.

O próximo exemplo sublinha a diferença entre o Princípio da multiplicação e o princípio da combinação:

Exemplo 3.19

Uma urna contém 10 bolas de pingue-pongue, numeradas de 1 a 10. Quatro bolas são retiradas da urna em sequência, e os números nas bolas são gravados. Quantas maneiras existem de isso ser feito se

- (a) irão cada bola é recolocada na urna antes que a próxima seja retirada
 (b) as bolas são retiradas e não são repostas.

Solução: No caso (a), sempre existem 10 bolas na urna, portanto sempre existem 10 escolhas. Pelo Princípio da multiplicação, o número de maneiras para retirar quatro bolas é $10^4 = 10.0000$. No caso (b), as bolas não são repostas, portanto o número de escolhas diminui em uma cada vez que uma bola é retirada. Por isso, existem $P(10, 4) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5.040$ maneiras de retirar quatro bolas.

O Exemplo 3.19 pertence ao gênero misterioso de “problemas de urna”. Embora não encontremos urnas com muita frequência na vida real, esse tipo de problema é um tanto prototípico. Como os problemas de placa de automóveis, os problemas de urna fornecem uma forma simples de classificar certos tipos de tarefas de enumeração. E escutamos com frequência os termos “com reposição” e “sem reposição” associados a arranjos ou seleções; essa terminologia faz sentido no contexto de urnas.

Aqui está uma leve variação do Exemplo 3.16:

Exemplo 3.20

Um time de beisebol é formado por 24 jogadores. De quantas maneiras diferentes podemos escolher um grupo de nove jogadores para começar o jogo?

Solução: A única diferença entre este problema e o Exemplo 3.16 é que nenhuma ordem é imposta ao grupo. Observe que qualquer escolha dos nove jogadores corresponde exatamente a $P_9^9 = 9!$ possíveis ordens de rebatedores. Assim, o número de ordens de rebatedores é 9! vezes maior do que o número de escolhas para um grupo de jogadores que iniciam o jogo. Por isso, (número de maneiras que podemos escolher para esse grupo é

$$\frac{P(24, 9)}{9!} = \frac{24!}{15!9!} = 1.307.504.$$

A distinção entre os Exemplos 3.16 e 3.20 é importante: nesse último, o grupo era um conjunto não ordenado. Esse tipo de escolha é chamada de seleção.

Definição 3.5: Princípio da Seleção

O número de maneiras das quais podemos escolher um subconjunto de r elementos a partir de um conjunto de n elementos é

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Uma vez que seleções envolvem a escolha de um subconjunto, lemos a expressão C_r^n como “ n escolhe r ”. Algumas vezes usamos a notação

$$C_r^n = \binom{n}{r}.$$

Note que $C_n^n = 1$, porque existe apenas um subconjunto contendo todos os elementos: o conjunto inteiro. Similarmente $C_0^n = 1$, porque o conjunto vazio é o único subconjunto com zero elementos.

Compare a fórmula para C_r^n com a fórmula para P_r^n . No Princípio da seleção, o $r!$ no denominador corresponde ao fato de que nenhuma ordem é imposta aos elementos do subconjunto. Tanto arranjos

quanto seleções envolvem a escolha de um subconjunto de algum conjunto. Vale a pena repetir a distinção fundamental: *Em arranjos, a ordem dos elementos no subconjunto importa; em seleções, ela não importa.*

Exemplo 3.21

Como no Exemplo 3.19, suponha que uma urna contem 10 bolas de pingue-pongue numeradas de 1 a 10. Em vez de retirarmos quatro bolas em sequencia, colocamos a mão na urna e retiramos as quatro bolas ao mesmo tempo. De quantas maneiras diferentes podemos retirar um punhado de quatro bolas?

Solução: Um “punhado” com quatro bolas de pingue-pongue é um conjunto não ordenado, portanto existem $C_4^{10} = 210$ resultados diferentes possíveis.

Tire um tempo para comparar as partes (a) e (b) do Exemplo 3.19 com o Exemplo 3.21. Os tamanhos de uma sequência ordenada com substituição, de uma sequência ordenada sem substituição e de um conjunto não ordenado (sem substituição) são 10.000, 5.040, e 210, respectivamente.

Exemplo 3.22

De quantas maneiras diferentes podemos rearranjar as letras na palavra PFFPPPPFFFF?

Solução: Embora este exemplo se pareça com o Exemplo 3.17, a solução é bem diferente porque as letras de PFFPPPPFFFF não são todas distintas. De fato, existem apenas duas letras, P e F, e nos devemos formar uma palavra de dez letras usando quatro P's seis F's. A fim de vermos isso como um problema de seleção, note que devemos preencher 10 espaços vazios

usando quatro Ps e seis F's. Uma vez que escolhemos aonde irão os Ps, não existem mais escolhas a serem feitas, e os espaços vazios são preenchidos com os F's. A ordem dos espaços vazios que escolhemos não importa, porque estamos colocando Ps em todos eles. Portanto, o número de maneiras que podemos preencher os espaços vazios é $C_6^{10} = 210$.

Você deve ter notado que poderíamos ter resolvido este problema escolhendo aonde iriam os Fs, e então nossa resposta seria C_4^{10} . Felizmente, $C_4^{10} = 210$ da mesma forma. De fato

$$C_k^n = C_{n-k}^n$$

para todo n e k com $n \geq k \geq 0$.

Rearranjar letras em uma palavra pode parecer uma distração inútil, mas existe uma variedade de problemas de contagem que são equivalentes ao Exemplo 3.22. Seguem dois exemplos:

Exemplo 3.23

No Exemplo 3.11, usamos uma árvore de decisão para contar todos os caminhos diretos ao longo de uma grade de ruas, movendo-se dois blocos para leste e dois blocos para sul. Poderíamos reformular esse problema da seguinte forma: quantas cadeias diferentes compostas por quatro símbolos existem usando dois L's e dois S's? Pelo método do Exemplo 3.22, existem $C_2^4 = 6$ cadeias desta forma.

Exemplo 3.24

Quantas soluções existem para a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13,$$

se x_1, \dots, x_5 devem ser números inteiros não-negativos?

Solução: Uma solução como esta corresponde a uma distribuição de 13 unidades entre as cinco variáveis x_1, \dots, x_5 . Por exemplo, a solução

$$x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 5, x_4 = 1, x_5 = 3$$

consiste na divisão de treze 1's em grupos da seguinte forma

$$1\ 1\ 1\ 1\ | \ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ | \ 1\ | \ 1\ 1\ 1$$

Podemos ver essa divisão em grupos como uma cadeia contendo quatro símbolos “ ” e treze símbolos “1”; toda cadeia como essa define uma Solução diferente para a equação, e todas as soluções podem ser representadas dessa maneira. Portanto, precisamos apenas contar as cadeias desse tipo. Pelo método do Exemplo 3.22, o número de cadeias possíveis (e também o número de soluções possíveis) é $C_4^{17} = 2380$.

Os princípios de adição, multiplicação, arranjo e seleção são poderosos o suficiente para solucionar a maioria dos problemas de contagem que surgem em matemática discreta. Porém, isso é mais fácil de ser dito do que feito: muitas vezes é preciso um pouco de habilidade para juntar esses quatro princípios.

Exemplo 3.25

Dois times, A e B , disputam um torneio melhor-de-sete. A partida termina quando um time vence quatro jogos. Quantos cenários diferentes de vitória e derrota são possíveis?

Solução: (Versão $n^\circ 1$) O torneio poderia ter quatro, cinco, seis ou sete jogos, e esses casos são disjuntos entre si. Existem apenas duas possibilidades para os ganhadores de um torneio em quatro jogos: AAAA ou BBBB. Em um torneio de cinco jogos, o time vencedor deve perder um dos quatro primeiros jogos, portanto existem $2 \cdot C_1^4 = 8$ maneiras pelas quais isso pode acontecer; o fator C_1^4 consiste em escolher qual jogo perder, e o fator 2 consiste na possibilidade de A ou B vencer o torneio. Similarmente, existem $2 \cdot C_2^5 = 20$ cenários para um torneio de seis jogos, e $2 \cdot C_3^6 = 40$ cenários para um torneio com sete jogos. Pelo Princípio da adição, existem $2+8+20+40=70$ cenários diferentes de vitória ou perda.

Essa última solução é uma boa ilustração do uso do princípio de adição combinado ao Princípio de seleção. No entanto, existe uma solução alternativa possivelmente mais fácil de ser compreendida.

Solução: (Versão $n^\circ 2$) Considere cada torneio com a duração de sete jogos, de modo que uma vez que um time ganhou quatro jogos, ele “entrega” os jogos restantes. Isso é o mesmo que terminar a partida após quatro vitórias de um time, portanto o número total de cenários de vitória e derrota deveria ser o mesmo. Devemos, Então, contar o número de cadeias com sete símbolos usando quatro A 's e três B 's (quando A ganha a partida) e o número de cadeias com sete símbolos usando quatro B 's e três A 's (quando B ganha). E como no Exemplo 3.22; em cada caso existem $C_4^7 = 35$ cadeias como esta, para um total de 70 cenários de vitória e derrota.

Uma terceira maneira de resolvermos o Exemplo 3.25 seria utilizar uma árvore de decisão (embora uma árvore como esta possa ficar bem grande). É sempre uma boa ideia procurar por soluções alternativas para problemas de contagem; é uma maneira de verificar sua resposta.

3.3 Teorema do Binômio

Você aprendeu em álgebra no colégio como expandir expressões como $(3x - 5)^4$ através da multiplicação de polinômios

$$\begin{aligned}
 (3x - 5)^4 &= (3x - 5)(3x - 5)(3x - 5)(3x - 5) \\
 &= (9x^2 - 15x - 15x + 25)(3x - 5)(3x - 5) \\
 &= (27x^3 - 45x^2 - 45x^2 + 75x - 45x^2 + 75x + 75x - 125)(3x - 5) \\
 &= (27x^3 - 135x^2 + 225x - 125)(3x - 5) \\
 &= 81x^4 - 405x^3 + 675x^2 - 375x - 135x^3 + 675x^2 - 1125x + 625 \\
 &= 81x^4 - 540x^3 + 1350x^2 - 1500x + 625.
 \end{aligned}$$

Depois de resolver diversos problemas como esse, alguns padrões se tornam evidentes. você provavelmente se lembra que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, e você ainda deve lembrar da fórmula para $(a + b)^3$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

Existe um padrão geral para a expansão de $(a + b)^n$ que vale a pena ser aprendido

Teorema 3.3

Sejam j e k números inteiros não-negativos tal que $j + k = n$. O coeficiente do termo $a^j b^k$ na expansão de $(a + b)^n$ é C_j^n .

Demonstração: Usamos indução em n . Se $n = 1$, temos $(a + b)^1 = a + b$, portanto o coeficiente do termo $a^0 b^1$ é $C_0^1 = 1$ e o coeficiente do termo $a^1 b^0$ é $C_1^1 = 1$.

Suponha como hipótese indutiva que o coeficiente do termo $a^{j'} b^{k'}$ na expansão de $(a + b)^{n-1}$ é $C_{j'}^{n-1}$ para todo j' e k' tal que $j' + k' = n - 1$. Suponha $j + k = n$. Agora aplique a hipótese indutiva para avaliar a expansão de $(a + b)^n$. No cálculo a seguir, precisamos apenas acompanhar os termos que são capazes de contribuir com o termo $a^j b^k$:

$$\begin{aligned}
 (a+b)^n &= (a+b)^{n-1}(a+b) \\
 &= \left(\dots + \binom{n-1}{j-1} a^{j-1} b^k + \binom{n-1}{j} a^j b^{k-1} + \dots \right) (a+b) \\
 &= \left(\dots + \binom{n-1}{j-1} a^j b^k + \binom{n-1}{j} a^j b^k + \dots \right).
 \end{aligned}$$

Portanto, o coeficiente de $a^j b^k$ é $C_{j-1}^{n-1} + C_j^{n-1}$. Mas isto simplifica:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j} &= \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-1-(j-1))!} + \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!} \cdot \frac{j}{j} + \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} \cdot \frac{n-j}{n-j} \\
&= \frac{(n-1)!(j)}{j!(n-j)!} + \frac{(n-1)!(n-j)}{j!(n-j)!} \\
&= \frac{(n-1)!(j) + (n-1)!(n-j)}{j!(n-j)!} \\
&= \frac{n!}{j!(n-j)!} \\
&= \binom{n}{j}
\end{aligned}$$

□

Essa demonstração foi um pouco bagunçada, mas as únicas ferramentas que utilizamos foram indução, álgebra e a definição de C_j^n). No entanto, existe uma maneira de vermos o resultado do ponto de vista de contagem. Ao expandirmos o produto

$$\underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_n$$

teríamos que utilizar a propriedade distributiva repetidamente para obter a soma de muitos monômios, e então teríamos que combiná-los como termos. Cada monômio é o produto de uma seleção de a 's e b 's: para obter um monômio, devemos escolher um a ou um b de cada fator $(a+b)$ e multiplicá-los todos. O coeficiente do termo $a^j b^k$ é, portanto, o número de maneiras pelas quais podemos obter o monômio $a^j b^k$. Mas esse é o número de maneiras que podemos escolher j fatores $(a+b)$ diferentes — os fatores que contribuem com um a para o monômio — de um total de n , ou seja, C_j^n .

Muitas vezes esse resultado é enunciado como uma equação:

Corolário 3.1

O Teorema do Binômio

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{j}a^j b^{n-j} + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

Exemplo 3.26

Use o teorema do binômio para expandir $(3x-5)^4$

Solução: Use o corolário com $a = 3x$ e $b = -5$

$$\begin{aligned}
(3x-5)^4 &= (3x)^4 + \binom{4}{1}(3x)^3(-5) + \binom{4}{2}(3x)^2(-5)^2 + \binom{4}{3}(3x)(-5)^3 + (-5)^4 \\
&= 81x^4 + (4)(27x^3)(-5) + (6)(9x^2)(25) + (4)(3x)(-125) + (625) \\
&= 81x^4 - 540x^3 + 1350x^2 - 1500x + 625
\end{aligned}$$

Note que expandir $(3x-5)^4$ multiplicando polinômios nos dá muito mais trabalho.

3.3.1 Exercícios propostos

1 Um comitê composto por três pessoas é escolhido de um grupo de 20 pessoas. Quantos comitês diferentes podem ser formados, se:

- o comitê consiste em um presidente, vice-presidente e tesoureiro
- não existem distinções entre os três membros do comitê?

2 Rute tem o seguinte conjunto de imãs de geladeira: $\{A, B, C, D, E, F, G\}$.

- Quantas cadeias diferentes, compostas por três letras, ela pode formar com esses imãs?
- Quantas cadeias diferentes, compostas por três letras, ela pode formar se a letra do meio deve ser uma vogal?

3 Hugo e Viviana trabalham em um escritório com mais oito colegas de trabalho. Desses 10 empregados, o chefe deles precisa escolher um grupo de quatro pessoas que irão trabalhar juntas em um projeto.

- Quantos grupos de trabalho diferentes o chefe pode escolher?
- Suponha que Hugo e Viviana se recusam a trabalhar juntos, sob qualquer circunstância. Sob essa restrição, quantos grupos de trabalho diferentes podem ser formados?

4 Forme uma palavra de sete letras misturando as letras na palavra COMBINE

- De quantas maneiras você pode fazer isso?
- De quantas maneiras você pode fazer isso se as vogais tem que estar no começo?
- De quantas maneiras você pode fazer isso se nenhuma vogal está isolada entre duas consoantes?

5 Quantas cadeias diferentes podem ser formadas ao rearranjarmos as letras na palavra ABABA?

6 Em uma classe, A, B, C, D e F são as possíveis notas em uma avaliação. (não ha +/-).

- De quantas maneiras um professor pode atribuir notas para uma classe de sete alunos?
- De quantas maneiras um professor pode atribuir notas para uma classe de sete alunos se ninguém receber um F e apenas uma pessoa receber um A?

7 O conselho escolar consiste em três homens e quatro mulheres.

- Quando realizam uma reunião, eles sentam em fileira. Quantos arranjos de assentos diferentes existem
- De quantas maneiras a fileira pode ser arranjada sem que haja duas mulheres sentadas ao lado uma da outra?
- Quantas maneiras existem de selecionar um subcomitê de quatro membros do conselho?
- Quantas maneiras existem de selecionar um subcomitê de quatro membros do conselho se o subcomitê deve conter pelo menos duas mulheres?

8 O Congresso de Porto Rico é formado por 27 senadores e 51 deputados

- Quantas maneiras existem de escolhermos um grupo de seis congressistas de Porto Rico?
- Quantas maneiras existem de escolhermos um grupo de seis congressistas, se três membros devem ser senadores e três devem ser deputados?

9 Existem 10 seleções de rugby de primeira linha: Argentina, Austrália, Inglaterra, França, Irlanda, Itália, Nova Zelândia, Escócia, África do Sul e País de Gales

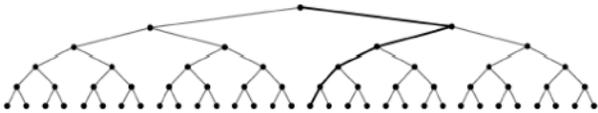
- Entre esses 10 times, quantas maneiras diferentes de emparelhamento de dois times são possíveis?

- b) A partir desses 10 times, de quantas maneiras podemos selecionar um primeiro, um segundo e um terceiro colocados?
- c) Suponha que quatro times irão se reunir em Auckland e os outros seis times irão se reunir em Melbourne. De quantas maneiras isso pode ser feito?
- d) Suponha que cinco times irão se reunir em Sydney e os outros cinco irão se reunir em Wellington. De quantas maneiras isso pode ser feito?

10 Quantas soluções (usando apenas números inteiros não negativos) existem para a equação a seguir?

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 20$$

11 A árvore binária a seguir tem o maior número possível de vértices para uma árvore de altura 5.



Definição: Uma subida é um caminho que começa na raiz e termina em uma folha. Por exemplo, o caminho indicado pelas linhas pretas é uma subida.

- a) Quantas subidas diferentes existem nessa árvore?
- b) Suponha que você tenha uma lista de 100 nomes, e você precisa atribuir um nome da lista para cada subida. você não pode repetir nomes. De quantas maneiras diferentes isso pode ser feito?
- c) Note que, a medida que uma subida vai da raiz para uma folha, ela deve ir ou para a direita ou para a esquerda em cada vértice. Dizemos que uma subida tem uma mudança de direção se ela vai para a direita após ter ido para a esquerda ou para a esquerda após ter ido para

a direita. Por exemplo, a subida indicada na figura anterior tem uma mudança de direção. Quantas subidas existem com exatamente duas mudanças de direção?

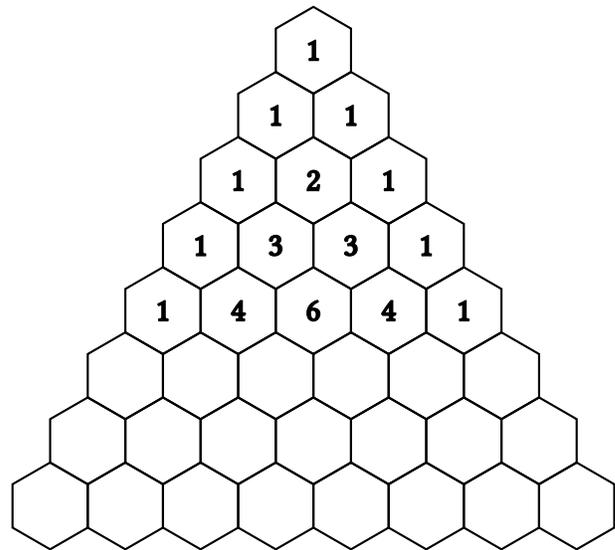
- d) Suponha que lhe é dada uma árvore binária como a árvore anterior, com o maior número de vértices possível, porém de altura 10. Nessa nova árvore, quantas subidas existem com exatamente duas mudanças de direção?

12 Use o Teorema do Binômio para expandir $(2x + 7)^5$.

13 Use o Teorema do Binômio para expandir $(x + 1)^{10}$.

14 Calcule o coeficiente de x^8 na expansão de $(3x - 2)^{13}$.

15 O diagrama a seguir é chamado de **Triângulo de Pascal**, em homenagem ao filósofo/teólogo/matemático Blaise Pascal (1623-1662).



- a) Identifique o padrão dos valores e preencha os espaços em branco.
- b) Explique o que esse diagrama tem a ver com C_j^n . (Use o resultado do problema anterior na sua explicação).

3.4 Contando com Funções

Quando diante de um novo tipo de problema matemático, muitas vezes relacioná-lo a algo familiar ajuda. Nos Exemplos 3.20 e 3.24, nossos argumentos de contagem eram baseados em ver relações entre objetos matemáticos. Observamos que $9!$ ordens de rebatedores correspondem a cada escolha de nove jogadores, e vimos que cada solução para uma equação particular poderia ser unicamente representada por um certo tipo de cadeia. Essas relações podem ser pensadas como funções. Nesta Seção, exploramos maneiras de contar usando pensamento relacional.

As duas observações a seguir são bem fáceis de serem demonstradas.

Teorema 3.4

Sejam $|X| = m$ e $|Y| = n$. Se existe alguma $f: X \rightarrow Y$ que é injetiva, então $m \leq n$.

Teorema 3.5

Sejam $|X| = m$ e $|Y| = n$. Se existe alguma $f: X \rightarrow Y$ que é sobrejetiva, então $m \geq n$.

Juntos, eles implicam este corolário:

Corolário 3.2

Sejam $|X| = m$ e $|Y| = n$. Se existe uma bijeção $f: X \rightarrow Y$, então $m = n$.

Esse corolário afirma que, se dois conjuntos finitos estão em correspondência bijetiva um com o outro, então os conjuntos tem o mesmo número de elementos. Embora seja raro usarmos esse resultado de forma explícita quando resolvemos problemas de contagem, ele pode, muitas vezes, guiar o nosso pensamento.

Exemplo 3.27

Em um torneio eliminatório, os jogadores são distribuídos em pares em cada rodada, e o vencedor de cada partida avança para a próxima rodada. Se o número de jogadores em uma rodada é ímpar, um dos jogadores passa para a próxima rodada sem jogar. O torneio continua até restarem apenas dois jogadores; esses dois jogadores disputam a final para determinar o vencedor do torneio. Em um torneio com 270 jogadores, quantas partidas devem ser jogadas?

Solução: Este problema é fácil se percebermos que existe uma correspondência bijetiva

$$f: G \rightarrow L$$

em que G é o conjunto de todas as partidas jogadas e L é o conjunto de jogadores que perdem um jogo. A função é definida para qualquer partida x como $f(x) = \ell$, em que ℓ é o perdedor da partida x . Uma vez que toda partida tem um único perdedor, a função é bem definida. Uma vez que esse é um torneio eliminatório, nenhum jogador pode perder duas partidas diferentes, portanto f é injetiva. E uma vez que todo perdedor perdeu algum jogo, f é sobrejetiva. Logo, pelo Corolário 3.2, o número de jogos equivale ao número de perdedores. O vencedor do torneio é o único não perdedor, portanto existem 269 perdedores, e consequentemente 269 jogos.

Definição 3.6

Uma função $f : X \rightarrow Y$ é chamada n -para-um se para cada y na imagem da função ha exatamente n elementos diferentes de X que são enviados por f em y . Em outras palavras, f é n -para-um se

$$|\{x \in X | f(x) = y\}| = n$$

para todo $y \in f(X)$.

Note que essa definição coincide com a definição de injetiva quando $n = 1$ se existe exatamente um $x \in X$ tal que $f(x) = y$ par todo y na imagem, Então o único jeito de $f(a) = f(b)$ acontecer é quando $a = b$

PENSAMENTO RELACIONAL