Capítulo 5

Teste de Hipóteses

5.1 Introdução

Suponhamos que uma certa distribuição dependa de um parâmetro que não se conheça ou, então, que haja razões para acreditar que este variou, seja pelo passar do tempo ou, então, pela modificação na produção, por exemplo.

A inferência estatística fornece um processo de análise denominado *teste de hipóteses*, que permite decidir por um valor desse parâmetro ou por sua alteração com um grau de risco conhecido.

Uma afirmação sobre um parâmetro populacional é chamada de **hipótese estatística**. Para testar uma afirmação sobre um parâmetro populacional, você deve especificar, cuidadosamente, um par de hipóteses – uma que represente a afirmação e outra, seu complemento. Quando uma dessas hipóteses é falsa, a outra deve ser verdadeira. Qualquer uma das hipóteses – a **hipótese nula** ou a **hipótese alternativa** – pode representar a afirmação original.

Definição 5.1

- Uma **hipótese nula** H_0 é uma hipótese estatística que contém uma afirmação de igualdade, tal como $\leqslant$, $=$ ou $\geqslant$.
- A **hipótese alternativa** H_a é o complemento da hipótese nula. É uma afirmação que é aceita como verdadeira se H_0 for falsa e contém uma declaração de desigualdade estrita, tal como $<$, $\neq$ ou $>$.

O símbolo H_0 é lido como “H zero” ou “H nula”, e H_a, como “H a”.

5.2 Testes de hipótes para a média com σ conhecido

Você aprenderá agora como realizar um teste de hipótese para uma média μ supondo que o desvio padrão σ é conhecido. Quando σ é conhecido, você pode usar o escore-z para a média. Para usá-lo, você precisa encontrar o valor padronizado para a estatística de teste $\bar{x}$.

$$Z = \frac{\text{média amostral} - \text{média hipotética}}{\text{erro padrão}}$$

Proposição 5.1 (Teste z)

O teste z para uma média μ é um teste estatístico para uma média populacional. A estatística de teste é a média amostral $\bar{x}$. A estatística de teste padronizada é $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ quando:

a) A amostra é aleatória.

b) Pelo menos um dos seguintes requisitos é verdade: a população é normalmente distribuída ou $n \geqslant 30$.

Lembre-se de que $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ é o erro padrão da média,

O procedimento para a realização de um teste de hipóteses é o que se segue:

Afirmação 5.1 (teste de hipóteses)

a) Identifique as hipóteses nula e alternativa.

b) Especifique o nível de significância α.

c) Calcule a estatística de teste padronizada $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

d) Fixam-se duas regiões: uma **região de não rejeição** de H_0 (RNR) e uma **região crítica** (RC) de H_0 para o valor calculado Z_c, ao nível de risco dado.

e) Se Z_c está na RNR, a decisão é a de *não rejeitar* H_0.

f) Se Z_c está na RC, a decisão é a de *rejeitar* H_0.

Nota:

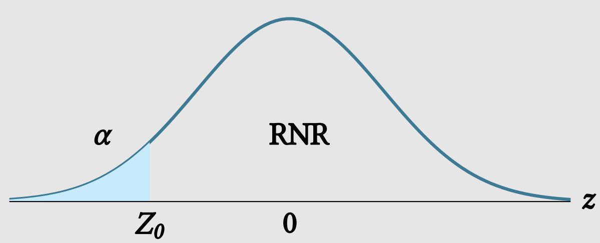
Para calcular o(s) valor(es) crítico(s) Z_0 que separam RNR e RC, quando o teste de hipótese é:

a) unilateral à esquerda, encontre o escore-z que corresponde a uma área de α.

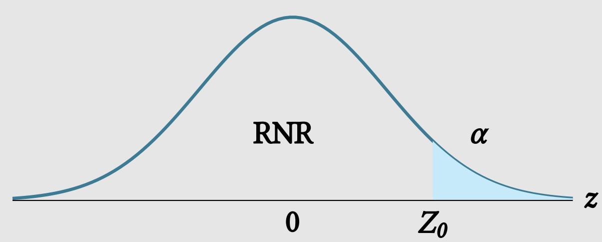
b) unilateral à direita, encontre o escore-z que corresponde a uma área de $0,5 - \alpha$.

c) bilateral, encontre os escores-z que correspondem a $\frac{\alpha}{2}$ e $0,5 - \frac{\alpha}{2}$.

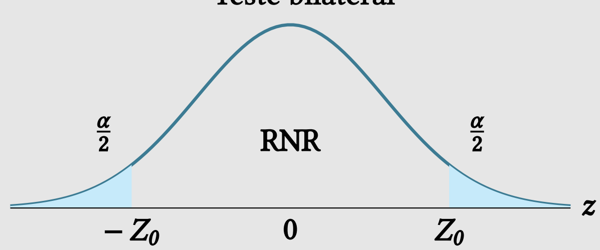
Teste unilateral à esquerda



Teste unilateral à direita



Teste bilateral



Note que uma estatística de teste padronizada que cai em uma região de rejeição é considerada um evento incomum.

Quando você não puder encontrar a área exata na tabela, use a área que está mais próxima com o arredondamento correto.

Exemplo 5.1

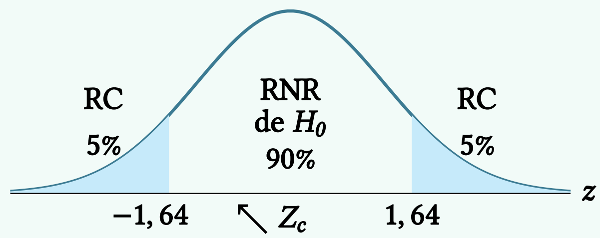
De uma população normal com variância 36, toma-se uma amostra casual de tamanho 16, obtendo-se $\bar{x} = 43$. Ao nível de 10%, testar as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 45 \\ H_a: & \mu \neq 45 \end{cases}$$

As hipóteses já estão definidas. O nível de significância α é 10%. A amostra tem tamanho $n = 16$ e a estimativa da média já foi calculada, isto é, $\bar{x} = 43$.
Como $\sigma^2 = 36$, então $\sigma = 6$ e o erro padrão é $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{16}} = \frac{6}{4} = 1,5$. Assumindo a média hipotética $\mu = 45$, temos

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{43 - 45}{1,5} = \frac{-2}{1,5} = -1,33.$$

Como o teste é bilateral e $\alpha = 0,10$, então a metade da RNR é $P(0 < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,5 - \frac{\alpha}{2} = 0,45$. Porém, o valor mais próximo de 0,45 na tabela é 1,64, então temos $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,64$. De forma similar, a RC é dada por $P(Z > Z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2} = 0,05$ que também nos diz que $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,64$.



Como $Z_c = -1,33$, temos que Z_c está na RNR. Portanto, a decisão é não rejeitarmos H_0, isto é, a média é 45, com 10% de risco de não rejeitarmos uma hipótese falsa.

Exemplo 5.2

Uma fábrica anuncia que o índice de nicotina dos cigarros da marca X apresenta-se abaixo de 26 mg por cigarro. Um laboratório realiza 10 análises do índice obtendo: 26, 24, 23, 22, 28, 25, 27, 26, 28, 24. Sabe-se que o índice de nicotina dos cigarros da marca X se distribui normalmente com variância 5,36 mg^2. Pode-se aceitar a afirmação do fabricante ao nível de 5%?

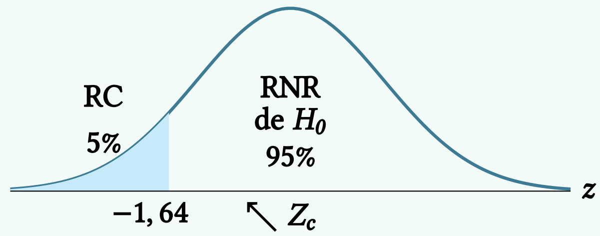
Solução: Temos

$$\begin{cases} H_0: & \mu \geqslant 26 \\ H_a: & \mu < 26 \quad \text{(afirmação do enunciado)} \end{cases}$$

com nível de significância $\alpha = 0,05$, a amostra tem tamanho $n = 10$ e a estimativa da média é $\bar{x} = \frac{253}{10} = 25,3$.
O erro padrão é $\frac{\sqrt{\sigma^2}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{5,36}{10}} = \sqrt{0,536} = 0,73$. Assumindo a média hipotética $\mu = 26$, temos

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{25,3 - 26}{0,73} = \frac{-0,7}{0,73} = -0,959.$$

Do exemplo anterior temos $Z_\alpha = Z_{5\%} = 1,64$. Dessa forma, RNR = $(-1,64; +\infty)$ e RC = $(-\infty; -1,64]$.



Como $Z_c = -0,959$, temos que Z_c está na RNR. Portanto, não se rejeita H_0, isto é, ao nível de 5%, podemos concluir que a afirmação do fabricante é falsa.

Exemplo 5.3

Uma fabricante de lajotas de cerâmica introduz um novo material em sua fabricação e acredita que aumentará a resistência média, que é de 206 kg. A resistência das lajotas tem distribuição normal com desvio padrão de 12 kg. Retira-se uma amostra de 30 lajotas, obtendo $\bar{x} = 210$ kg. Ao nível de 10%, pode o fabricante aceitar que a resistência média de suas lajotas tenha aumentado?

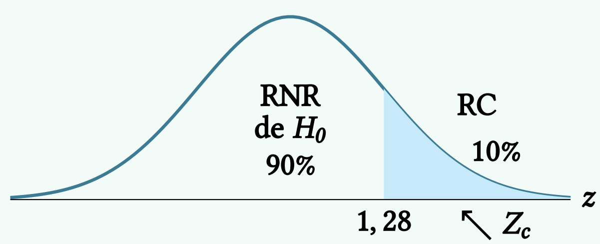
Solução: Temos

$$\begin{cases} H_0: & \mu \leqslant 206 \\ H_a: & \mu > 206 \quad \text{(afirmação do enunciado)} \end{cases}$$

com nível de significância $\alpha = 0,10$, a amostra tem $n = 30$ e a estimativa da média é $\bar{x} = 210$.
O erro padrão é $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{30}} = 2,19$. Assumindo a média hipotética $\mu = 206$, temos

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{210 - 206}{2,19} = \frac{4}{2,19} = 1,826.$$

Agora, $P(0 < Z < Z_\alpha) = 0,5 - \alpha = 0,40$. Comparando os valores na tabela, concluímos que $Z_{10\%} = 1,28$. Dessa forma, RNR $= (-\infty; 1,28]$ e RC $= (1,28; +\infty)$.



Como $Z_c > Z_\alpha$, temos que Z_c está na RC. Portanto, rejeita-se H_0, isto é, ao nível de 10%, o fabricante pode concluir que a resistência média de suas lajotas aumentou.

Nota:

Observe que poderiam ser usados outros níveis de significância. Por exemplo, se no Exemplo 5.1 for adotado o nível 0,01, substituímos, em toda a explanação anterior, 1,64 por 2,58 (veja a Tabela abaixo).

Nível de significância α	0,10	0,05	0,01	0,005	0,002
Valores críticos de Z para testes unilaterais	$-1,28$ ou 1,28	$-1,64$ ou 1,64	$-2,33$ ou 2,33	$-2,58$ ou 2,58	$-2,88$ ou 2,88
Valores críticos de Z para testes bilaterais	$-1,64$ e 1,64	$-1,96$ e 1,96	$-2,58$ e 2,58	$-2,81$ e 2,81	$-3,08$ e 3,08

5.3 Teste de hipóteses para proporção

Você aprendeu como realizar um teste de hipótese para uma média populacional μ. Nesta seção, aprenderá como testar uma proporção populacional p.

Definição 5.2: teste z para uma proporção p

O **teste** z **para uma proporção** p é um teste estatístico para uma proporção populacional. A estatística de teste é a proporção amostral $\hat{p}$ e a estatística de teste padronizada é:

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

Lema 5.1 (teste para p)

a) Identifique as hipóteses nula e alternativa.

b) Especifique o nível de significância α.

c) Tome uma amostra de tamanho n e defina x = n° de sucesso, calculando $\hat{p} = \frac{x}{n}$.

d) Usando p dado por H_0, calcule $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

e) Calcule a estatística de teste padronizada $Z = \dfrac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$.

f) Defina as regiões RNR e RC da mesma forma anterior e, com o mesmo procedimento, *rejeite ou não H_0.*

Exemplo 5.4

Sabe-se por experiência que 5% da produção de um determinado artigo é defeituosa. Um novo empregado é contrato. Ele produz 600 peças do artigo com 82 defeituosas. Ao nível de 15%, verifique se o novo empregado produz peças com maior índice de defeitos que o existente.

Solução: Temos

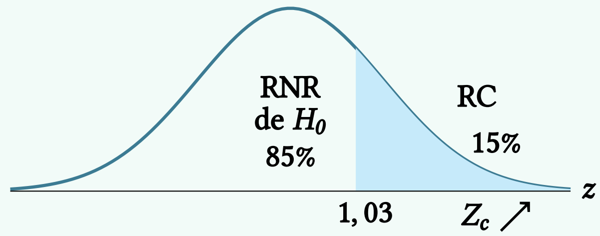
$$\begin{cases} H_0: & p \leqslant 0,05 \\ H_a: & p > 0,05 \quad \text{(afirmação do enunciado)} \end{cases}$$

com nível de significância $\alpha = 0,15$, a amostra tem $n = 600$ com $x = 82$, ou seja, a estimativa da proporção amostral $\hat{p} = \frac{82}{600} = 0,137$.

O erro padrão é $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0,05 \cdot 0,95}{600}} = 0,0089$. Assumindo a proporção hipotética $p = 0,05$, temos

$$Z_c = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{0,137 - 0,05}{0,0089} = \frac{0,087}{0,0089} = 9,775.$$

Agora, $P(0 < Z < Z_\alpha) = 0,5 - \alpha = 0,35$. Comparando os valores na tabela, concluimos que $Z_{15\%} = 1,03$. Dessa forma, RNR $= (-\infty; 1,03]$ e RC $= (1,03; +\infty)$.



Como $Z_c > Z_\alpha$, temos que Z_c está na RC. Portanto, rejeita-se H_0, isto é, com 15% de risco, podemos levantar sérias dúvidas quanto à habilidade do novo empregado na fabricação do artigo, sendo sua proporção de defeitos superior à dos demais.

5.4 Exercícios resolvidos

Questão 1

Uma fábrica de automóveis anuncia que seus carros consomem, em média, 11 litros por 100 km, com desvio padrão de 0,8 litro. Uma revista decide testar essa afirmação e analisa 35 carros dessa marca, obtendo 11,4 litros por 100 km como consumo médio. Admitindo que o consumo tenha distribuição normal, ao nível de 10%, o que a revista concluirá sobre o anúncio da fábrica?

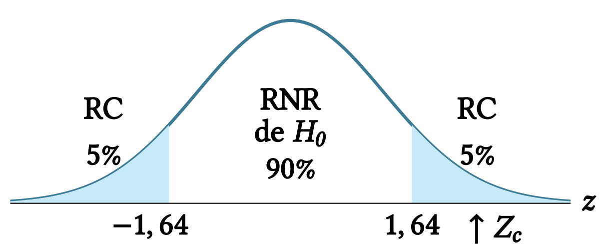
Solução: Ao nível de 10%, temos:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 11 \\ H_a: & \mu \neq 11 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \bar{x} = 11,4 \\ n = 35 \end{array} \qquad \text{erro padrão} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,8}{\sqrt{35}} = 0,135$$

Assumindo a média hipotética, temos

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{11,4 - 11}{0,135} = \frac{0,4}{0,135} = 2,963.$$

Como o teste é bilateral e $\alpha = 0,10$, então temos $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,64$ pela tabela.



Como $Z_c \in$ RC, rejeita-se H_0, isto é, ao nível de 10% a revista pode concluir que o anúncio não é verdadeiro.

Questão 2

A altura dos adultos de uma certa cidade tem distribuição normal com média de 164 cm e desvio padrão de 5,82 cm. Deseja-se saber se as condições sociais desfavoráveis vigentes na parte pobre dessa cidade causam um retardamento no crescimento de população. Para isso, levantou-se uma amostra de 144 adultos dessa parte da cidade, obtendo-se a média de 162 cm. Pode esse resultado indicar que os adultos residentes na área são em média mais baixos que os demais habitantes da cidade ao nível de 5%?

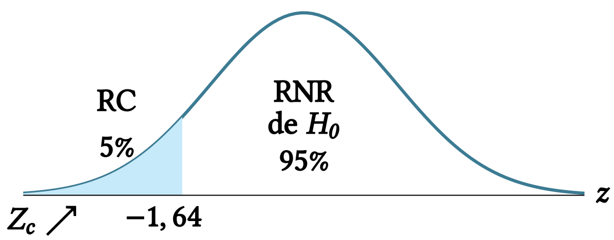
Solução: Ao nível de 5%, temos:

$$\begin{cases} H_0: & \mu \geqslant 164 \\ H_a: & \mu < 164 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \bar{x} &= 162 \\ n &= 144 \end{aligned} \qquad \text{erro padrão} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5,82}{\sqrt{144}} = 0,485$$

Assumindo a média hipotética, temos

$$Z_c = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{162-164}{0,485} = \frac{-2}{0,485} = -4,124.$$

Como o teste é unilateral à esquerda e $\alpha = 0,05$, então temos $Z_\alpha = 1,64$ pela tabela.



Como $Z_c < Z_\alpha \Rightarrow Z_c \in \text{RC}$, rejeita-se H_0, isto é, podemos assumir que as condições sociais desfavoráveis provocam um retardamento no crescimento da população na parte estudada ao nível de 5%.

Questão 3

Em uma experiência sobre percepção extrassensorial (PES), um indivíduo *A*, em uma sala isolada, é solicitado a declarar a cor vermelha ou preta (em números iguais) de cartas tiradas ao acaso de um baralho de 50 cartas, por um indivíduo *B*, posicionado em outra sala. Se *A* identifica corretamente 32 cartas, esse resultado é significativo ao nível de 5% para indicar que *A* tem PES?

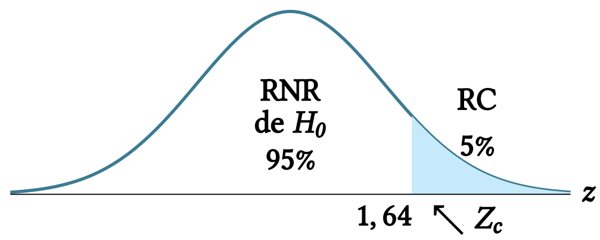
Solução: Como a chance de errar ou acertar a cor de cada carta é $\frac{1}{2}$, temos:

$$\begin{cases} H_0: & p \leqslant 0,5 \\ H_a: & p > 0,5 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= 32 \\ n &= 50 \end{aligned} \qquad \text{proporção amostral} = \frac{x}{n} = \frac{32}{50} = 0,64$$

O erro padrão é $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{50}} = 0,0707$. Assim, assumindo a proporção hipotética, temos

$$Z_c = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{0,64-0,5}{0,0707} = \frac{0,14}{0,0707} = 1,9802.$$

Como o teste é unilateral à direita e $\alpha = 0,05$, então temos $Z_\alpha = 1,64$ pela tabela.



Como $Z_c > Z_\alpha \Rightarrow Z_c \in$ RC, rejeita-se H_0, isto é, podemos concluir que A tem PES.

Questão 4

Um candidato a deputado estadual afirma que terá 60% dos votos dos eleitores de uma cidade. Um instituto de pesquisa colhe uma amostra de 300 eleitores dessa cidade, encontrando 160 que votarão no candidato. Esse resultado, ao nível de 5%, mostra que a afirmação do candidato é verdadeira?

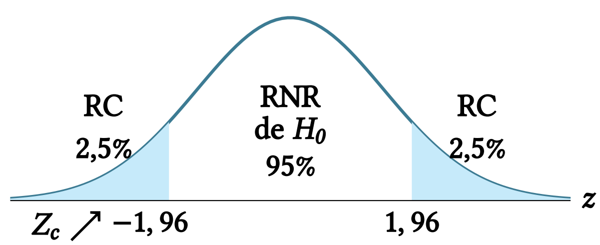
Solução: Temos:

$$\begin{cases} H_0: & p = 0,6 \\ H_a: & p \neq 0,6 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = 160 \\ n = 300 \end{matrix} \qquad \text{proporção amostral} = \frac{x}{n} = \frac{160}{300} = 0,53$$

O erro padrão é $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{300}} = 0,0283$. Assim, assumindo a proporção hipotética, temos

$$Z_c = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{0,53 - 0,6}{0,0283} = \frac{-0,07}{0,0283} = -2,473.$$

Como o teste é bilateral e $\alpha = 0,05$, então temos $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$ pela tabela.



Como $Z_c \in$ RC, rejeita-se H_0, isto é, podemos aceitar que a afirmação do candidato é falsa, a 5% de risco.

Questão 5

A vida média de uma amostra de 100 lâmpadas produzidas por uma firma foi calculada 1570 horas, desvio padrão de 120 horas. Sabe-se que a duração das lâmpadas dessa firma tem distribuição normal com média de 1600 horas. Ao nível de 1%, testar se houve alteração na duração média das lâmpadas.

Solução: Temos:

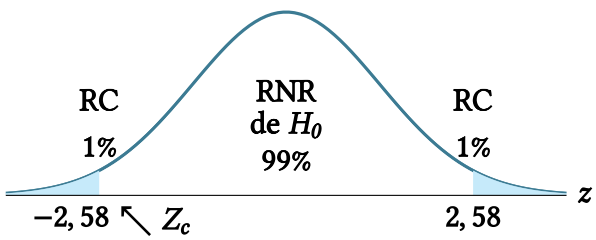
$$\begin{cases} H_0: & p = 1600 \\ H_a: & p \neq 1600 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \bar{x} = 1570 \\ n = 100 \end{matrix} \qquad \text{erro padrão} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{120}{\sqrt{100}} = 12$$

(Repare que a variância populacional é desconhecida, porém a amostra é grande, o que permite usar a distribuição normal com s^2 sendo um estimador não-viciado de σ^2.)

Assim, assumindo a média hipotética, temos

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{1570 - 1600}{12} = \frac{-30}{12} = -2,5.$$

Como o teste é bilateral e $\alpha = 0,01$, então temos $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,58$ pela tabela.



Como $Z_c \in$ RNR, não rejeitamos H_0, isto é, não é significativa a alteração da vida média das lâmpadas a 1% de risco.

Esse resultado levanta o seguinte problema: como proceder quando $Z_c \cong Z_\alpha$? Rejeitar ou não rejeitar? Devemos refazer o teste, aumentando o número de elementos na amostra, ou diminuindo o nível do teste.

Quando não é possível fazer o procedimento acima, é melhor decidir pela rejeição de H_0, pois o erro tipo I é menos grave que o erro tipo II.

No caso acima, se o nível fosse 5%, $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ seria 1,96 e assim, H_0 seria rejeitada, significando que haveria alteração na duração média das lâmpadas.

5.5 Exercícios propostos

1 Testar $\begin{cases} H_0: & \mu \leqslant 50 \\ H_a: & \mu > 50 \end{cases}$

Dados: $\sigma^2 = 4$, $\alpha = 5\%$, $n = 100$ e $\bar{x} = 52$.

2 Testar $\begin{cases} H_0: & \mu \geqslant 36 \\ H_a: & \mu < 36 \end{cases}$

Dados: $\sigma^2 = 9$, $\alpha = 1\%$, $n = 64$ e $\bar{x} = 34,7$.

3 A duração em horas de trabalho de 5 tratores foi 9420, 8200, 9810, 9290 e 7030 horas. Sabe-se que a duração dos tratores dessa marca é normal com desvio padrão de 55 horas. Ao nível de 3%, testar:

a) $\begin{cases} H_0: & \mu \leqslant 8700 \\ H_a: & \mu > 8700 \end{cases}$ b) $\begin{cases} H_0: & \mu = 8700 \\ H_a: & \mu \neq 8700 \end{cases}$

4 Os espécimes de uma colheita apresentam altura média de 170 cm e desvio padrão de 5 cm. A altura tem distribuição normal e uma amostra de 40 espécimes apresentou média de 167 cm. Podemos afirmar, ao nível de 5%, que essa amostra é formada por espécimes dessa colheita?

5 Lança-se uma moeda 100 vezes e observa-se que ocorrem 40 caras. Baseado nesse resultado, podemos afirmar, ao nível de 5%, que a moeda não é honesta?

6 Um exame padrão de inteligência tem sido usado por vários anos com média de 80 pontos e desvio padrão de 7 pontos. Um grupo de 25 estudantes é ensinado, dando ênfase à resolução de testes passados. Se esse grupo obtem média de 83 pontos no exame, há razões para se acreditar que a ênfase dada mudou o resultado do teste ao nível de 10%?

7 Um fabricante de certa droga medicinal afirma que ela é 90% eficaz na cura de uma alergia, em determinado período. Em uma amostra de 200 pacientes, a droga curou 150 pessoas. Teste ao nível de 1% se a pretensão do fabricante é legítima.