

Câmpus
Nordeste
UnU - Posse



Universidade
Estadual de Goiás

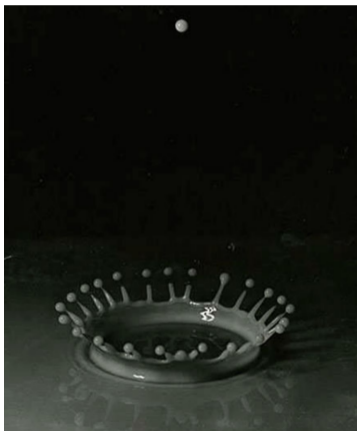
Sincronização e Bifurcações em Redes Acopladas Não-lineares

Antonio Melo
antonio@ueg.br

May 14, 2025



Simetria em Sistemas não-lineares?





A **dinâmica equivariante** examina como as simetrias de uma equação diferencial afetam o comportamento de suas soluções. [1, 10]

Por simplicidade, assumamos que o *espaço de fase* de um sistema dinâmico é $X = \mathbb{R}^k$ e considere uma EDO

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad x \in X, \quad (1)$$

onde $f : X \rightarrow X$ é uma função suave (campo vetorial).

Simetrias surgem quando um grupo Γ de transformações lineares age em X . Exigimos que todos os elementos de Γ associem soluções da EDO a outras soluções. Isso é equivalente a f ser Γ -equivariante, ou seja,

$$f(\gamma x) = \gamma f(x) \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in X \quad (2)$$



Exemplo

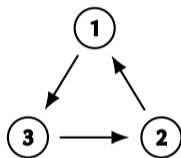
Considere o sistema de equações para 3 neurônios de Fitzhugh-Nagumo acoplados:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_1(a - v_1)(v_1 - 1) - w_1 - cv_2 & \dot{w}_1 &= bv_1 - \gamma w_1 \\ \dot{v}_2 &= v_2(a - v_2)(v_2 - 1) - w_2 - cv_3 & \dot{w}_2 &= bv_2 - \gamma w_2 \\ \dot{v}_3 &= v_3(a - v_3)(v_3 - 1) - w_3 - cv_1 & \dot{w}_3 &= bv_3 - \gamma w_3 \end{aligned} \quad (3)$$

onde v_i é o potencial de membrana da célula i , w_i é um substituto para uma corrente iônica e a, b, γ são parâmetros constantes com $0 < a < 1$, $b < 0$, $\gamma > 0$.

O grupo de simetria é \mathbb{Z}_3 gerado pelo 3-ciclo (123) atuando nos pares (v_j, w_j) .

Podemos pensar num **diagrama de rede** para o sistema (3) que represente os acoplamentos como mostrado abaixo.



$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_2),$$

$$\dot{x}_2 = f(x_2, x_3),$$

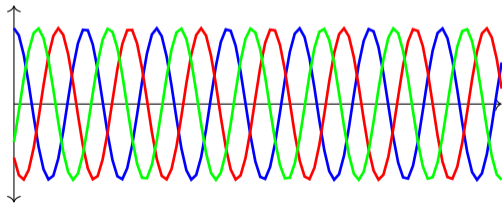
$$\dot{x}_3 = f(x_3, x_1),$$

onde os círculos representam células e setas representam os acoplamentos das variáveis nas equações. Como essas entram nas equações do mesmo modo para cada i sujeita à permutação cíclica, as setas exibem o mesmo tipo assim como as células por terem o mesmo *espaço de estados*.

Acima, fazemos $x_j = (v_j, w_j)$ para exibir a forma geral de outros sistemas com essa configuração.

Ressaltamos que, quando $a = b = \gamma = 0.5$ e $c = 2$, o sistema (3) tem um estado periódico estável em que as células sucessivas têm um terço de um período fora de fase. Abaixo mostramos o padrão para v_j ; o mesmo padrão ocorre para w_j . Este estado é uma *onda rotativa discreta* que exhibe simetria espaço-temporal induzida pela ação de \mathbb{Z}_3 :

$$x_2(t) = x_1(t - T/3) \quad x_3(t) = x_1(t - 2T/3)$$





Com as devidas adequações, muitos resultados de dinâmica equivariante se aplicam a redes simétricas. Contudo, poucos modelos em ciências aplicadas exibem simetrias globais.

Em 2002, Marcus Pivato descreveu uma rede de 16 células que tinha um estado periódico em que os nós foram particionados em 4 subconjuntos de 4 nós. [14]

As células em cada partição eram síncronas enquanto células em partições distintas apresentavam a mesma dinâmica a menos de um deslocamento de fase múltiplo de $1/4$ do período. Tratava-se de uma onda rotativa induzida por \mathbb{Z}_4 , exceto pelo fato da rede **não possuir simetria \mathbb{Z}_4** .



Por volta de 2003, Marty Golubitsky, Ian Stewart e demais colaboradores propuseram uma teoria para estudar esse tipo de rede partindo da noção de simetria local, estabelecendo o **formalismo via grupoides**. [9, 11]

Matematicamente, uma rede é representada por um grafo direcionado cujos nós e arestas são classificados de acordo com rótulos ou “tipos” associados. Os nós (ou “células”) de uma (direcionada e rotulada) rede \mathcal{G} representam sistemas dinâmicos (variáveis de estado) e as arestas (“setas”) representam acoplamentos, interações entre essas variáveis.

Formalmente, temos:



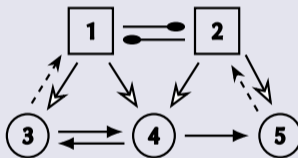
Definição de rede

Uma *rede de células acopladas* $\mathcal{G} = \mathcal{G}(C, \mathcal{S})$ constitui-se de:

1. Um conjunto finito $C = \{1, 2, \dots, n\}$ de células.
2. Um conjunto finito \mathcal{S} de setas.
3. Dois mapas $\mathcal{H} : \mathcal{S} \rightarrow C$ e $\mathcal{T} : \mathcal{S} \rightarrow C$ tais que cada seta $s \in \mathcal{S}$ tem uma *cabeça* $\mathcal{H}(s) \in C$ e uma *cauda* $\mathcal{T}(s) \in C$.
4. Uma relação de equivalência \sim_C sobre as células em C que classifica seu *espaço de fase*.
5. Uma relação de equivalência \sim_S sobre as setas em \mathcal{S} que as classifica de acordo com seus *conjuntos de entrada*.
6. Duas condições de compatibilidade: Se $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ são \sim_S -equivalentes, então $\mathcal{H}(s_1)$ e $\mathcal{H}(s_2)$ são \sim_C -equivalentes, e do mesmo modo, $\mathcal{T}(s_1)$ e $\mathcal{T}(s_2)$.

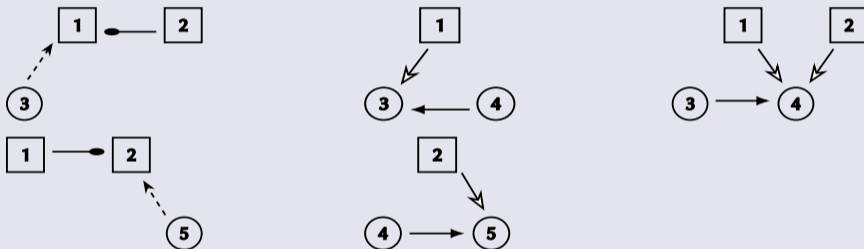
Exemplo

Seja \mathcal{G} a rede exibida abaixo:



Vemos que as células 1 e 2 são isomórficas por entradas, assim como as células 3 e 5. Porém, as células 1 e 3 não são isomórficas por entradas. Apesar de ambas receberem duas entradas, os tipos de seta são diferentes.

Exemplo de conjunto de entradas



Da esquerda para a direita: $I(1)$, $I(3)$, $I(4)$, $I(2)$, $I(5)$.

Estritamente, as setas constituem o conjunto de entradas mas é conveniente também mostrar as células da cabeça e cauda delas.



Veremos agora como a sincronia se manifesta em redes.

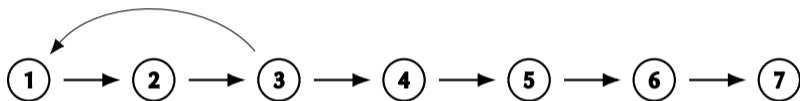
Uma **polidiagonal** é um subespaço

$$\Delta = \{x \mid x_c = x_d \text{ para alguns subconjuntos de células}\}$$

Um **subespaço de sincronia** é uma polidiagonal fluxo-invariante.



Considere a seguinte rede do tipo “alimentação direta” (feed-forward) com suas funções admissíveis:



$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_3),$$

$$\dot{x}_2 = f(x_2, x_1),$$

$$\dot{x}_3 = f(x_3, x_2),$$

$$\dot{x}_4 = f(x_4, x_3),$$

$$\dot{x}_5 = f(x_5, x_4),$$

$$\dot{x}_7 = f(x_7, x_6),$$

$$\dot{x}_7 = f(x_7, x_6),$$

Podemos particionar essa rede usando **colorações** onde $\Delta = \{x \mid x_1 = x_4 = x_7; x_2 = x_5; x_3 = x_6\}$ é fluxo-invariante.



Considere a seguinte rede do tipo “alimentação direta” (feed-forward) com suas funções admissíveis:



$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_3),$$

$$\dot{x}_2 = f(x_2, x_1),$$

$$\dot{x}_3 = f(x_3, x_2),$$

$$\dot{x}_4 = f(x_4, x_3),$$

$$\dot{x}_5 = f(x_5, x_4),$$

$$\dot{x}_7 = f(x_7, x_6),$$

$$\dot{x}_7 = f(x_7, x_6),$$

Podemos particionar essa rede usando **colorações** onde $\Delta = \{x \mid x_1 = x_4 = x_7; x_2 = x_5; x_3 = x_6\}$ é fluxo-invariante.

Definição (coloração)

Uma *coloração* de uma rede \mathcal{G} é um mapa

$$\kappa : \mathcal{C} \rightarrow K$$

onde K é um conjunto cujos elementos são chamados *cores*.

Dizemos que as células c e d *tem a mesma cor* se $\kappa(c) = \kappa(d)$ e escrevemos $c \sim_{\kappa} d$ (equivalência por cores).

Uma coloração κ é *balanceada* se, sempre que c e d tem a mesma cor, então existe um isomorfismo de entradas $\beta : I(c) \rightarrow I(d)$ tal que i e $\beta(i)$ têm a mesma cor para todo $i \in \mathcal{T}(I(i))$.

Na prática, uma coloração é balanceada se existe um isomorfismo de entradas que preserva cores de quaisquer duas células de mesma cor. Como células da mesma cor devem ser equivalentes por entradas, uma coloração balanceada é um refinamento da equivalência de entradas.

A *polidiagonal* definida por uma coloração κ de \mathcal{G} é o espaço

$$\Delta_{\kappa} = \{x \mid \kappa(c) = \kappa(d) \implies x_c = x_d\}$$

Ou seja, células da mesma cor são síncronas para $x \in \Delta_{\kappa}$.

Teorema

Uma polidiagonal Δ_{κ} é invariante para toda função admissível se, e somente se, κ é balanceada.



Rede Regular

Uma rede homogênea é *regular* se possui todos os acoplamentos do mesmo tipo.

Matriz de Adjacência

A *matriz de adjacência* de uma rede regular é dada pela matriz $A = [a_{ij}]$, onde a_{ij} representa o número de setas recebidas pela célula i que vieram da célula j .

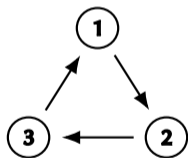
Rede Bidirecional

Uma rede é dita *bidirecional* quando todos os seus acoplamentos entre células se manifestam em pares de setas com sentidos opostos. Dito de outro modo, uma rede é bidirecional quando apresenta matriz de adjacência simétrica.

$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_3),$$

$$\dot{x}_2 = f(x_2, x_1),$$

$$\dot{x}_3 = f(x_3, x_2),$$

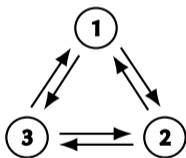


$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = g(x_1, \overline{x_2, x_2}),$$

$$\dot{x}_2 = g(x_2, \overline{x_3, x_1}),$$

$$\dot{x}_3 = g(x_3, \overline{x_1, x_2}),$$

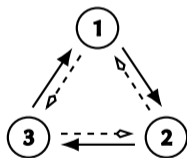


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = h(x_1, x_2, x_2),$$

$$\dot{x}_2 = h(x_2, x_3, x_1),$$

$$\dot{x}_3 = h(x_3, x_1, x_2).$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Uma *bifurcação* ocorre numa família de EDOs da forma $\dot{x} = F(x, \lambda)$ com um parâmetro λ quando a descrição qualitativa de estados muda próxima a algum valor de parâmetro λ_0 .

Na dinâmica equivariante, restrições de simetria podem forçar autovalores a serem múltiplos, e novos fenômenos ocorrem. Um notável é quebra espontânea de simetria, onde as soluções têm menos simetria do que as equações (Golubitsky e Stewart 2002).

Nas redes, a bifurcação local é mais complicada. A arquitetura de rede pode ter um forte efeito não apenas nos autovalores, mas também nas não-linearidades ao longo do ramo bifurcado. Isso pode se manifestar, por exemplo, na taxa de crescimento do ramo bifurcado. Redes podem exibir bifurcações de quebra de sincronia, onde um estado com algum padrão de sincronia perde estabilidade e o padrão de sincronia muda: algumas células que eram síncronas deixam de ser.

Considere o seguinte modelo de dinâmica evolutiva usado para amontoados de organismos inicialmente idênticos com fenótipos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x - (x + y + z) + x^2 \\ \dot{y} &= \lambda y - (x + y + z) + y^2 \\ \dot{z} &= \lambda z - (x + y + z) + z^2\end{aligned}\tag{4}$$

A matriz Jacobiana desse sistema é

$$J = \begin{bmatrix} \lambda - 1 + 2x & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 + 2y & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 + 2z \end{bmatrix}$$

Note que o sistema admite a solução trivial $(0, 0, 0)$ cuja estabilidade é dada pelos autovalores da *linearização* de \mathcal{J} neste ponto, obtendo

$$\mathcal{J}_0 = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

com autovalores $\lambda - 3$ e λ com multiplicidade 2.

Quando $\lambda < 0$ a solução trivial é estável mas perde estabilidade quando $\lambda > 0$.

Se olharmos para um equilíbrio próximo da origem, encontramos soluções não-triviais (u, u, v) , (u, v, u) , (v, u, u) onde

$$u = \frac{-\lambda + 1 - \sqrt{\lambda^2 - 6\lambda + 1}}{2} \quad v = \frac{-\lambda - 1 + \sqrt{\lambda^2 - 6\lambda + 1}}{2} \quad (5)$$



Observe que, considerando a matriz de adjacência A da rede associada e a matriz identidade, podemos escrever

$$\mathcal{J}_0 = (\lambda - 1) \cdot \mathbf{I}_3 + (-1) \cdot A \quad (6)$$

Observe que, considerando a matriz de adjacência A da rede associada e a matriz identidade, podemos escrever

$$\mathcal{J}_0 = (\lambda - 1) \cdot \mathbf{I}_3 + (-1) \cdot A \quad (6)$$

A partir daí, assuma que a dinâmica interna de cada célula é k -dimensional com $k > 1$. Num estado completamente síncrono, a matriz Jacobiana é determinada por duas matrizes de ordem k : a dinâmica interna linearizada Φ e o acoplamento linearizado Ψ de onde temos

$$(dF)_0 = \mathbf{I}_r \otimes \Phi + A \otimes \Psi. \quad (7)$$

Seja $K = \ker(dF)_{x_0, \lambda_0} \neq 0$.

Definição

Uma polidiagonal Δ_K , correspondente a uma coloração balanceada, é dita *axial* (em K) se $\dim(\Delta_K \cap K) = 1$.

Teorema de Ramificação para Redes

Seja \mathcal{G} uma rede regular e $F(x, \lambda)$ uma família de sistemas \mathcal{G} -admissíveis. Seja (x_0, λ_0) um ponto de bifurcação de quebra de sincronia. Então, genericamente cada polidiagonal axial em K corresponde um único ramo de zeros de F .



Uma bifurcação de quebra de sincronia associada ao autovalor μ_j pode levar a soluções estáveis somente se existirem matrizes Φ, Ψ de ordem k de modo que todos os autovalores das matrizes M_{μ_i} para $i \neq j$ tenham parte real negativa e todos os autovalores não críticos de M_{μ_j} tem partes reais negativas. Se esta condição necessária for satisfeita em uma bifurcação de codimensão um, chamamos essa bifurcação de **bifurcação primária**.

É conjecturado que, se k for grande o suficiente, pode haver uma bifurcação primária de quebra de sincronia com e codimensão um associada a qualquer autovalor μ_j da matriz de adjacência. Entretanto, essa conjectura pode ser provada apenas para redes regulares cujas matrizes de adjacência **têm autovalores reais**.

Considere um sistema dinâmico da forma

$$\dot{x} = -\nabla f(x), \quad (8)$$

onde $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ é um função suave de classe pelo menos C^2 , $x = (x_1, \dots, x_n)$ denota a variável de estado do espaço de fase total $P = (\mathbb{R}^m)^n$ e, para $i = 1, \dots, n$, $x_i \in \mathbb{R}^m$ é a variável da célula i .

Proposição 3.2

Uma condição necessária para uma rede homogênea satisfazer (8) é que os seus acoplamentos sejam todos bidirecionais. Dito de outro modo, é necessário que a matriz de adjacência associada ao digrafo da rede seja simétrica.

Demonstração: Seja F um campo vetorial admissível tal que $F = \nabla f$ para algum campo escalar f . Sejam $c, d \in C$ tais que c está acoplada a d pela seta $e' \in I(d)$. Temos $F = (F_1, \dots, F_n)$ onde

$$F_d(x_d, x_{I(d)}) = F_d(x_d, \dots, x_c, \dots) = \frac{\partial f}{\partial x_d}(x_d, \dots, x_c, \dots).$$

Como o campo F é gradiente, devemos ter $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ para todo $i \neq j$ (campo conservativo), ou seja,

$$\frac{\partial F_d}{\partial x_c} = \frac{\partial F_c}{\partial x_d} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_c} \frac{\partial f}{\partial x_d} = \frac{\partial}{\partial x_d} \frac{\partial f}{\partial x_c}$$

onde devemos ter $F_c(x_c, \dots, x_d, \dots)$, ou seja, existe uma seta $e'' \in I(c)$ de modo que d também está acoplada à célula c como queríamos mostrar.

Definição

Para uma rede \mathcal{G} , uma função suave $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função gradiente admissível* se seu gradiente ∇f for um campo vetorial \mathcal{G} -admissível.

Teorema

Seja \mathcal{G} uma rede não direcionada que possa ter várias arestas e laços e $A_{\mathcal{G}} = (a_{ij})$ denota a matriz de adjacência da rede \mathcal{G} . Uma função $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função gradiente admissível associada a \mathcal{G} se, e somente se, existem funções suaves $\alpha : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $\beta : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = \sum_{i=1, i \leq j}^n a_{ij} \beta(x_i, x_j) + \sum_{i=1}^n \alpha(x_i). \quad (9)$$

Se \mathcal{G} é bipartida e além disso existem $v_i \in V_1$ e $v_j \in V_2$ com a mesma valência, ou se \mathcal{G} não é bipartida, então β é invariante por permutações das variáveis de estado.

Dada uma função $h(q, p) : P \rightarrow \mathbb{R}$, um sistema dinâmico acoplado hamiltoniano é um sistema definido a partir de $2mn$ equações diferenciais ordinárias

$$(\dot{q}, \dot{p})^T = \mathbf{J} \nabla h(q, p), \quad (10)$$

onde

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nm} & \mathbf{I}_{nm} \\ -\mathbf{I}_{nm} & \mathbf{0}_{nm} \end{bmatrix} \quad (11)$$

é uma matriz anti-simétrica, $q = (q_1, \dots, q_n)$ e $p = (p_1, \dots, p_n)$ são chamados vetores de posição e momento, respectivamente, e formam o espaço de fase total $P = (\mathbb{R}^{2m})^n$ e, para $i = 1, \dots, n$, $(q_i, p_i) \in \mathbb{R}^{2m}$ é a variável de posição e momento de cada célula i .

Teorema

Suponha que um sistema hamiltoniano de equações diferenciais possa ser representado como um sistema acoplado de células hamiltonianas e sua rede de células acopladas seja conexa. Então, a rede deve ser acoplada bidirecionalmente.

Teorema

Seja \mathcal{G} uma rede não direcionada que possa ter várias arestas e laços e $A_{\mathcal{G}} = (a_{ij})$ denota a matriz de adjacência da rede \mathcal{G} . Uma função $h : P \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função hamiltoniana admissível associada a \mathcal{G} se, e somente se, existem funções suaves $\alpha : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\beta : \mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$h(q, p) = \sum_{i=1, i \leq j}^n a_{ij} \beta(q_i, q_j, p_i, p_j) + \sum_{i=1}^n \alpha(q_i, p_i). \quad (12)$$

Se \mathcal{G} é bipartida e além disso existem $v_i \in V_1$ e $v_j \in V_2$ com a mesma valência, ou se \mathcal{G} não é bipartida, então β é invariante pela permutação $\sigma(q_i, q_j, p_i, p_j) = (q_j, q_i, p_j, p_i)$.

A forma geral das funções gradiente admissíveis e funções hamiltonianas admissíveis para uma rede \mathcal{G} e sua rede quociente Q estão relacionadas da seguinte maneira:

Teorema

Seja \mathcal{G} uma rede não direcionada e seja \triangleright uma coloração balanceada no conjunto de vértices de \mathcal{G} que define uma rede quociente conexa não direcionada $Q = \mathcal{G}/\triangleright$. Seja $f^{\mathcal{G}}$ ($h^{\mathcal{G}}$) uma função gradiente (hamiltoniana) admissível de um sistema de células acoplados gradiente (hamiltoniano) de \mathcal{G} . Então, existe uma função gradiente (hamiltoniana) admissível f^Q (h^Q) para o sistema de células acopladas de Q restrito a Δ_{\triangleright} , de modo que

$$f^{\mathcal{G}}|_{\Delta_{\triangleright}} \equiv kf^Q, \quad h^{\mathcal{G}}|_{\Delta_{\triangleright}} \equiv kh^Q,$$

onde k é a cardinalidade das \triangleright -classes.



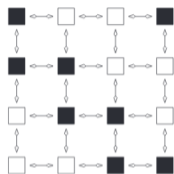
Definição

Dizemos que uma matriz M é hamiltoniana se, dada uma matriz J de estrutura simplética na forma (11), esta satisfaz

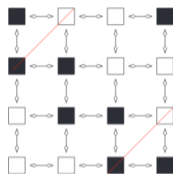
$$M^T J + J M = 0. \quad (13)$$

Corolário 3.14

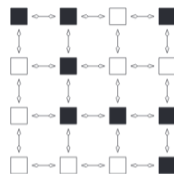
Suponha que tenhamos uma rede regular cuja dinâmica interna de cada célula seja hamiltoniana. Então, o sistema linearizado na origem é hamiltoniano se, e somente se, a matriz de acoplamento Ψ for hamiltoniana e a matriz de adjacência da rede for simétrica.



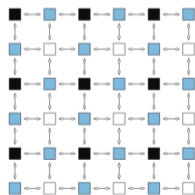
(a)



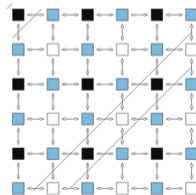
(b)



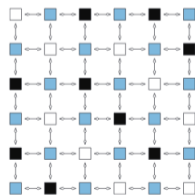
(c)



(a)

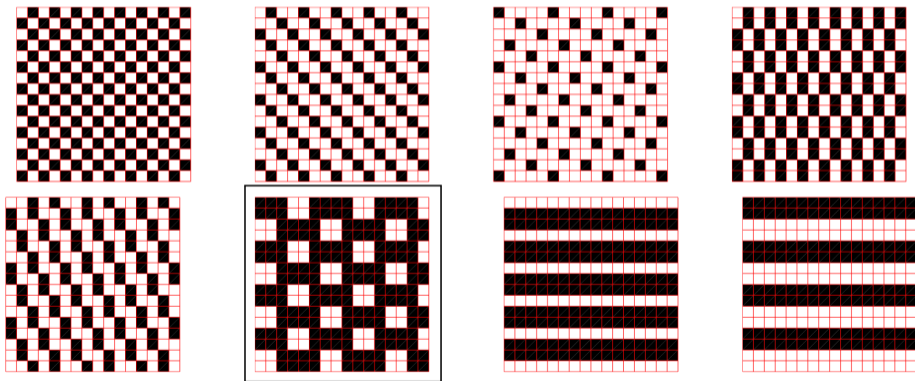


(b)



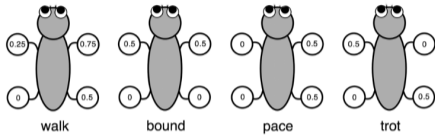
(c)

Wang e Golubitsky [16] listam vários padrões para duas cores.

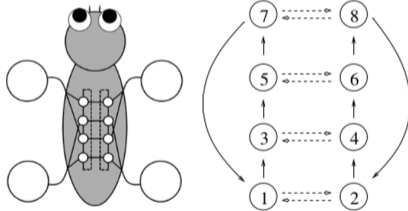


Aplicações

Central Pattern Generator - CPG



(a)



(b)

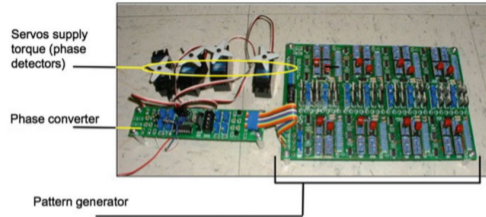
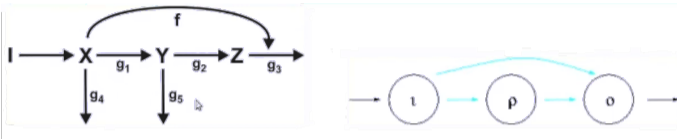
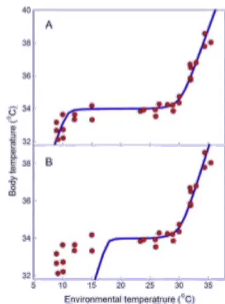


Fig. 6.1 ANIBOT. To the best of our knowledge, this is the first quadruped robot controlled by a CPG electronic circuit built based on the 8-network proposed by Golubitsky et al. [61, 62, 146, 148]



Nijhout and Reed (*Integrative Comparative Biology* 54, 2014)

Introduce **chair**
escape from homeostasis
input-output map

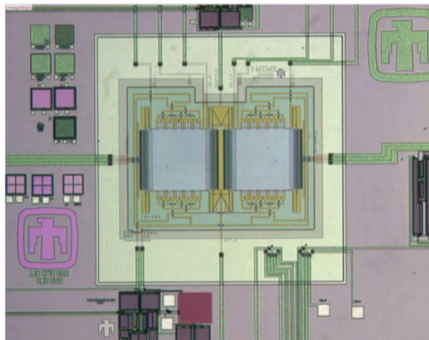
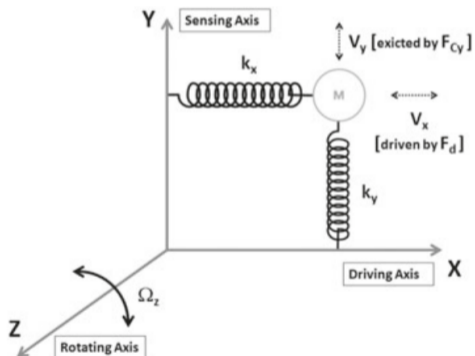


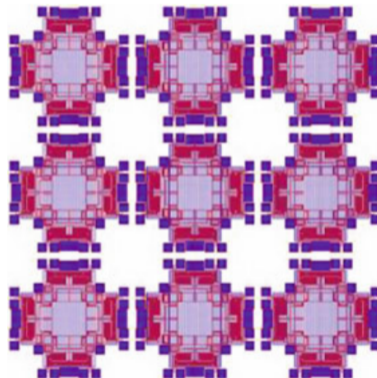
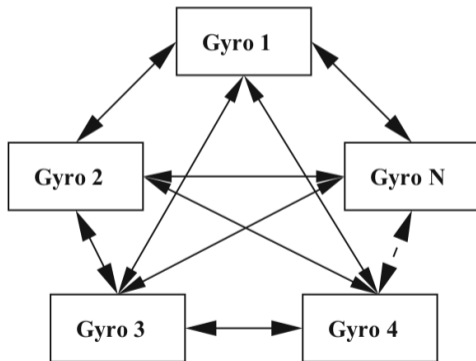
$$\begin{aligned} \dot{x} &= I - g_1(x) - g_4(x) & \dot{x}_l &= f_l(x_l, I) \\ \dot{y} &= g_1(x) - g_2(y) - g_5(y) & \dot{x}_\rho &= f_\rho(x_l, x_\rho) \\ \dot{z} &= g_2(y) - f(x)g_3(z) & \dot{x}_o &= f_o(x_l, x_\rho, x_o) \end{aligned}$$

- g_j are kinetic functions $l = \text{input}; \rho = \text{regulatory}; o = \text{output}$

- Infinitesimal homeostasis if and only if $f_x = \frac{1}{g_3} \frac{g_1' g_2'}{g_2' + g_5'}$

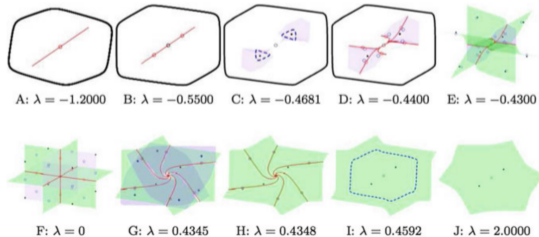
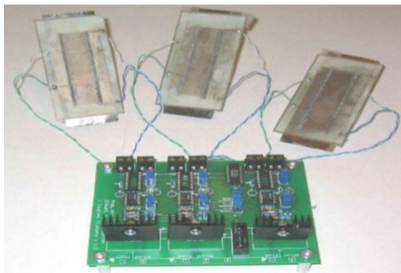
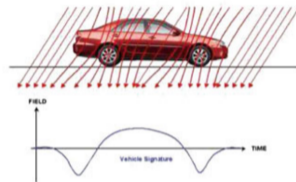
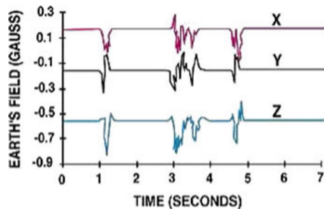
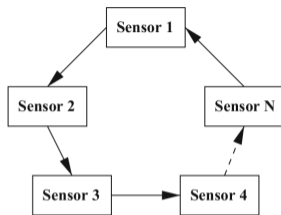
Adapted from: [Reed, Best, Golubitsky, Stewart and Nijhout \(2018\)](#)





Aplicações

Magnetômetro Fluxgate com núcleo acoplado



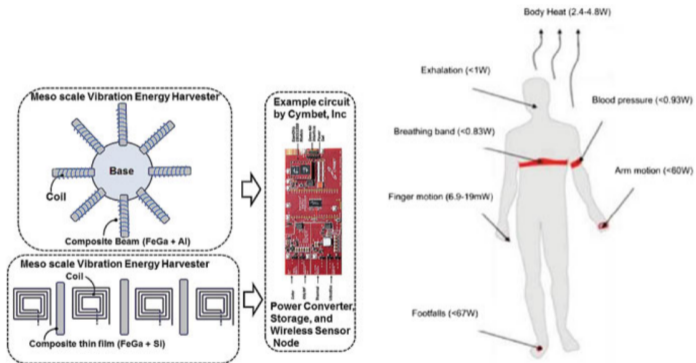
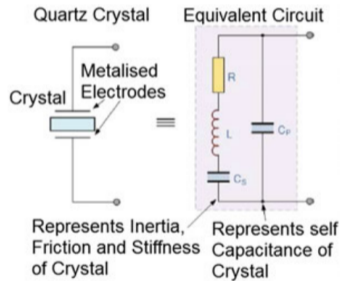
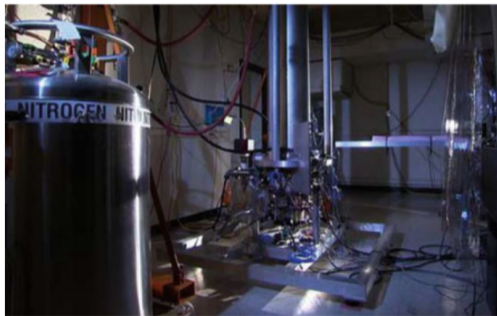


Fig. 1.27 (Left) Schematic of network implementation of a coupled energy harvester device. (Right) One of many applications of energy harvesters includes health monitoring devices



- [1] F. Antoneli, I. Stewart. *Symmetry and synchrony in coupled cell networks 1: Group networks*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 16, No. 3 (2006), 559–577.
- [2] F. Antoneli, A.P.S. Dias, M. Golubitsky, Y. Wang. Synchrony in lattice differential equations. In: Some Topics In Industrial and Applied Mathematics. (R. Jeltsch, T. Li, and I. Sloan, eds.) Contemporary Applied Mathematics Series 8 World Scientific Publ. Co., 2007.
- [3] F. Antoneli, M. Golubitsky and I. Stewart. *Homeostasis in a feed forward loop gene regulatory network motif*. J. Theoretical Biology. 445 (2018) 103-109; DOI:10.1016/j.jtbi.2018.02.026



- [4] F. Antoneli, A.P.S. Dias, and R. Paiva. *Hopf Bifurcation in Coupled Cell Networks with Interior Symmetries*. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, Vol. 7, No. 1 (2008), 220-248.
- [5] H. Brandt. *Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes*, Math. Ann. 96 (1927), 360–366.
- [6] R. Brown. *From groups to groupoids: A brief survey*, Bull. London Math. Soc. 19 (1987), 113–134.
- [7] A.P.S. Dias, I. Stewart. *Symmetry groupoids and admissible vector fields for coupled cell networks*. J. London Math. Soc. 69 no. 3 (2004) 707–736.
- [8] P. J. Higgins, *Notes on Categories and Groupoids*, Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies 32, Van Nostrand Reinhold, London, (1971).



- [9] M. Golubitsky, I. Stewart. *Nonlinear dynamics of networks: the groupoid formalism*. Bull. Amer. Math. Soc. 43 (2006) 305–364.
- [10] M. Golubitsky, I. Stewart, and D. Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory: Vol. 2.*, Appl. Math. Sci. 69, Springer-Verlag, New York, (1988).
- [11] M. Golubitsky, I. Stewart, and A. Török. *Patterns of synchrony in coupled cell networks with multiple arrows*, SIAM J. Appl. Dyn. Sys. 4(1) (2005) 78–100.
- [12] J. Meiss. *Differential dynamical systems*. Vol. 14. SIAM; (2007).
- [13] A. Melo. *Redes de sistemas dinâmicos acoplados com estrutura gradiente ou hamiltoniana*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de São Paulo, São José dos Campos, SP, 2020.



- [14] I. Stewart, M. Golubitsky, M. Pivato. *Symmetry groupoids and patterns of synchrony in coupled cell networks*. SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2 no. 4 (2003) 609–646.
- [15] A. Weinstein, *Groupoids: Unifying internal and external symmetry*, Notices Amer. Math. Soc., 43 (1996), pp. 744–752.
- [16] Y. Wang, M. Golubitsky. *Two-color patterns of synchrony in lattice dynamical systems*. Nonlinearity 18 (2005) 631–657.

Câmpus
Nordeste
UnU - Posse



Universidade
Estadual de Goiás

Grato pela atenção!

